ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. П. Аксенов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

УЧЕБНИК и ПРАКТИКУМ

СООТВЕТСТВУЕТ ПРОГРАММАМ ВЕДУЩИХ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

УМО ВО рекомендует
МО рекомендует

юрайт
издательство

А. П. Аксенов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 1

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ ВУЗОВ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям

Курс с практическими заданиями и дополнительными материалами доступен на образовательной платформе «Юрайт», а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва • Юрайт • 2024

УДК 517.1-3(075.8)
ББК 22.161я73
А42

Автор:

Аксенов Анатолий Петрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Рецензенты:

Кудрявцев Л. Д., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского физико-технического института, старший научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова;

Розанова С. А., доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики;

Карасев В. А., кандидат технических наук, доцент Московского государственного института стали и сплавов.

Аксенов, А. П.

А42 Математический анализ. В 4 частях. Ч. 1 : учебник и практикум для вузов / А. П. Аксенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 282 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-03510-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-534-03511-7

Данная книга представляет собой первую часть учебника «Математический анализ» (учебник разделен на четыре части), который издается в рамках авторского цикла учебников по разделам высшей математики.

Содержание учебника полностью охватывает программу по курсу математического анализа для технических вузов.

В первой части учебника изложен теоретический материал по теории вещественных чисел, функциям одной переменной, теории пределов последовательностей и функций, дифференциальному исчислению функций одной переменной.

Разобрано большое количество примеров и задач, разъясняющих основные идеи, понятия, теоретические факты и их практическое применение. Все сформулированные теоремы (трудные и простые), как правило, доказываются.

Соответствует актуальным требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов первых курсов высших технических учебных заведений. Может быть использован для самостоятельной подготовки и повышения квалификации.

УДК 517.1-3(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-534-03510-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-534-03511-7

Оглавление

Предисловие к циклу учебников по высшей математике

Вашему вниманию предлагается цикл книг по разделам высшей математики (математический анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория функций комплексной переменной), составленных на основе курсов лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете.

Основанием для написания цикла послужило желание дать достаточное по строгости, глубине и доходчивости изложение основ высшей математики.

Возникшая еще в древности из практических потребностей математика выросла к настоящему времени в громадную систему разветвленных дисциплин. Как и другие науки, она отражает законы материальной действительности и служит важным инструментом познания природы. Одной из характерных особенностей математики является исключительная широта ее применения.

Во-первых, мы постоянно — на производстве, в быту, в общественной жизни — пользуемся наиболее распространенными понятиями и выводами математики, вовсе не задумываясь об этом. Так, мы применяем арифметику, считая дни или расходы, а подсчитывая площадь квартиры, используем формулы геометрии. Формулы эти, конечно, очень простые, но следует знать, что когда-то в древности они были одним из высших достижений зарождавшейся тогда математики.

Во-вторых, вся современная техника была бы невозможна без математики, так как без расчетов не обходится ни одно техническое усовершенствование. Наконец, почти все науки в той или иной степени пользуются математикой. Точные науки — механика, астрономия, физика, а также в большой мере и химия — обычно выражают свои законы формулами и развивают свои теории, широко используя математический аппарат. Без математики прогресс этих наук был бы просто невозможен.

Приведем несколько примеров особенно блестящих применений математики в точных науках и технике. Одна из самых далеких планет солнечной системы — Нептун была открыта в 1846 г. на основании математических расчетов. Анализируя "неправильности" в движении планеты Уран, астрономы Д. Адамс и У. Леверье пришли к выводу, что они вызваны притяжением другой планеты. Леверье на основании законов механики и закона тяготения вычислил, где эта планета должна находиться, и наблюдатель, которому он об этом сообщил, увидел ее в телескоп там, где указал Леверье. Это открытие было триумфом не только механики и астрономии, но также и математического расчета.

Другой, не менее убедительный пример — открытие электромагнитных волн. Английский физик Дж. Максвелл, обобщая установленные опытами законы электромагнитных явлений, выразил эти законы в виде уравнений. Из уравнений он чисто математически вывел, что могут существовать электромагнитные волны и что они должны распространяться со скоростью света. Опираясь на это, он предложил электромагнитную теорию света, которая затем была всесторонне развита и обоснована.

Но кроме того, вывод Максвелла подтолкнул ученых на поиски электромагнитных волн чисто электрического происхождения, например испускаемых при колебательном разряде. Такие волны, действительно, были открыты Г. Р. Герцем. А вскоре А. С. Попов нашел средства возбуждения, передачи и приема электромагнитных колебаний, вывел их в область широких применений и положил тем самым начало всей радиотехнике. Таким образом, в открытии радио, ставшего общим достоянием, большую роль сыграли также результаты чисто математического вывода.

Так от наблюдений наука идет к обобщению, к теории явлений, к формулировке законов и их математическому выражению. Из этих законов рождаются новые выводы, и, наконец, теория воплощается в практике, которая в свою очередь дает теории новые мощные импульсы к развитию.

Замечательно еще и то, что часто даже самые абстрактные построения математики, возникшие внутри нее самой, уже без непосредственного влияния со стороны естествознания или техники находят тем не менее плодотворные применения. Например, понятие о мнимых числах появилось в алгебре, и долго их реальный смысл оставался непонятным, на что указывает само их название. Однако после того, как им было дано геометрическое толкование, мнимые числа вполне укрепились в математике, и возникла обширная теория функций комплексной переменной. Эта теория, так сказать, "мнимых" функций от "мнимых" переменных оказалась вовсе не мнимым, а очень реальным средством решения вопросов техники. Так, основная теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе крыла самолета доказывается как раз средствами этой теории. Та же теория оказывается полезной при решении задач, например о просачивании воды под плотинами — задач, значение которых очевидно в период строительства крупных электростанций.

В настоящее время благодаря появлению быстродействующих вычислительных машин произошел большой качественный скачок в использовании математических методов, которые стали применяться не только в тех областях, где математика использовалась уже давно, но и в тех областях человеческих знаний, где либо математика еще совсем недавно применялась мало, либо ее применение даже не представлялось возможным (медицина, экономика, лингвистика, социология и т.п.).

Современный научный работник или инженер должен хорошо владеть математическими методами исследования, которые могут применяться в сфере его деятельности. Для того чтобы иметь возможность применять математические методы при изучении того или иного вопроса, нужно прежде всего уметь правильно использовать математический аппарат, знать границы допустимого использования рассматриваемой математической модели.

Свободное владение математическими методами накапливается и развивается в процессе систематических занятий, в результате длительной и настойчивой работы. Кто последовательно овладевает математическим аппаратом, приобретает твердое и точное знание математических фактов, тот легко и просто двигается дальше, приобретает уверенность в способности и умении справиться с встречающейся ему задачей, и математика делается послушным инструментом в его руках.

Большая польза от изучения математики состоит еще и в том, что оно (изучение) совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует человека, приучает логически рассуждать, воспитывает точность и обстоятельность аргументации.

Математика учит не загромождать исследование ненужными подробностями, не влияющими на сущность дела, и наоборот, не пренебрегать тем, что имеет принципиальное значение для существа изучаемого процесса.

Овладеть в достаточной мере математическим методом, математической культурой мышления — далеко не простая задача. Но для того, кто сумеет этого достичь, труд не пропадет зря. Для него откроются новые перспективы человеческой деятельности, качественно новые возможности творчества и познания мира.

Помочь в этом и призван предлагаемый цикл учебников.

Автор посчитал полезным сделать изложение вопросов теории очень подробным и сопроводить его большим числом разобранных примеров и задач. Он исходил из убеждения, что такое построение курса поможет студентам быстрее овладеть практическими рецептами решения тех или иных задач, а также понять глубокие общие идеи, из которых эти рецепты возникают.

Помимо книг, содержащихся в списках литературы, указанных в учебниках, для их написания автором использованы материалы лекций, которые ему посчастливилось слушать в Ленинградском (ныне Санкт-Петербургском) государственном университете.

С искренней благодарностью автор вспоминает своих учителей — профессоров В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца, А. Ф. Андреева, Г. М. Голузина, И. П. Натансона, Д. К. Фаддеева, блестящие лекции которых оставили у него неизгладимое впечатление.

Автор приносит глубокую благодарность доценту кафедры высшей математики СПбГПУ А. В. Ястребову за большую помощь в работе над циклом книг, а также за целый ряд полезных советов.

Автор выражает свою искреннюю признательность проректору СПбГПУ В. Н. Козлову за внимание, проявленное им к работе над учебниками.

Предисловие

Цикл книг по разделам высшей математики открывается учебником по математическому анализу. Весь курс математического анализа разделен на две части, каждая из которых выходит в двух томах.

Данная книга представляет собой первый том четырехтомника “Математический анализ”.

Учебник адресован студентам первых курсов высших технических учебных заведений, обучающимся по направлениям и профилям технических специальностей высшего образования (ВО), раздел “Математический и естественнонаучный цикл” для которых содержит согласно ФГОС ВО курс “Математический анализ” или “Высшая математика”. Он может быть использован и для самостоятельной подготовки и повышения квалификации по базовой части этих дисциплин. Для успешного овладения материалом обучающиеся должны хорошо знать школьный курс математики и владеть навыками логического и алгоритмического мышления, а также математическими методами решения задач согласно требованиям стандартов среднего образования.

В первом томе учебника изложен теоретический материал по темам “Теория вещественных чисел”, “Границы числовых множеств”, “Предел числовой последовательности”, “Понятие функции одной переменной. Предельное значение функции. Непрерывность”, “Свойства непрерывных функций”, “Понятие равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора”, “Производная и дифференциал функции”, “Основные теоремы дифференциального исчисления”, “Теория экстремальных значений функции”, “Построение графика функции по характерным точкам”.

Разобрано большое количество примеров и задач, разъясняющих основные идеи, понятия, теоретические факты и их практическое применение. Все высказанные теоремы (трудные и простые), как правило, доказываются. Это является следствием убежденности автора в том, что распространенная тенденция устранять трудности в учебниках и изустных курсах за счет строгости и глубины, за счет подмены доказательств некоторыми их подобиями — вредная тенденция, поскольку фиктивные “доказательства” смазывают трудности и лишают обучение одной из важнейших его сторон — формированию у студентов одной из наиболее ценных компетенций — навыков к логически правильному мышлению.

Математическим анализом называют раздел, посвященный изучению функций. Так как функция есть отвлеченный образ зависимости одной величины от другой, то можно сказать, что анализ имеет своим предметом зависимости между переменными величинами вообще, в отвлечении от их содержания. Такое отвлечение обеспечивает широту применений анализа, так как в одной формуле, в одной теореме он охватывает бесконечное число возможных конкретных случаев.

Решающим шагом в математике переменных величин было создание И. Ньютоном и Г. В. Лейбницем во второй половине XVII в. дифференциального и интегрального исчисления. *Дифференциальное исчисление* в своей основе есть метод нахождения скорости движения в любой данный момент времени, когда известна зависимость пути от времени.

Интегральное исчисление в своей основе есть метод нахождения пройденного пути, когда известна зависимость скорости движения от времени. Эта задача, очевидно, — обратная к задаче дифференциального исчисления.

Стоит отвлечься от механической формулировки задач дифференциального и интегрального исчисления и говорить о функциях вообще, а не о зависимости пути или скорости от времени, как мы получим общее понятие о задачах дифференциального и интегрального исчисления в их чистом виде.

В основе дифференциального и интегрального исчисления, как и всего анализа в его дальнейшем развитии, помимо понятий переменной и функции лежит также сложившееся позже понятие предела, ибо способы фактического вычисления скорости по закону изменения пути (дифференцирование) и пути по скорости (интегрирование) основаны на применении алгебры в соединении с понятием предела. Перечисленные понятия определяют содержание компетенций, знаний и умений, формируемых при изучении материала.

Согласно последним требованиям ФГОС ВО в результате изучения дисциплины "Математический анализ" обучающиеся должны:

знать

— основные понятия и методы математического анализа;

— положения и теоретические основы дифференциального и интегрального исчисления;

— методы решения прикладных задач, базирующиеся на отыскании наибольших или наименьших значений функций, вычислении интегралов и пределов, сравнении бесконечно малых и бесконечно больших величин, исследовании функций и построении графиков и т.п.;

уметь

— использовать полученные знания о математических понятиях, методах и моделях в практической деятельности при вычислении пределов, производных и дифференциалов, интегралов и иных характеристик, встречающихся в курсах естественнонаучных, общепрофессиональных и специальных дисциплин;

— применять теоретические знания для математического исследования реальных малых и бесконечно больших величин, исследования функций и построения графиков, а также анализа и интерпретации полученных результатов в прикладных задачах;

— самостоятельно формулировать, обосновывать и строго логически и математически доказывать утверждения из области теории пределов и непрерывности функций, дифференциального и интегрального исчисления функций одной вещественной переменной;

— выбирать необходимые математические методы для практического решения уравнений, задач оптимизации, оценки погрешности и др.;

владеть

— навыками разрешения проблем, возникающих в ходе математического моделирования реальных процессов и явлений методами дифференциального и интегрального исчисления функций одной вещественной переменной;

— навыками работы с учебной и научной математической литературой для поиска необходимой информации по вопросам вычисления пределов, производных, дифференциалов, неопределенных и определенных интегралов;

— современными технологиями математического анализа и информационной поддержки решения задач теории функций одной вещественной переменной.

На основе полученных знаний у обучающихся формируются следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

— способность использовать основные законы и методы дифференциального и интегрального исчисления в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования функций одной переменной в теоретических и экспериментальных исследованиях;

— умение выявить математическую сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения физико-математический аппарат исчисления бесконечно малых и бесконечно больших величин, графическое представление на базе исследования монотонности и выпуклости функций, отыскания экстремумов;

— способность разрабатывать математические модели объектов профессиональной деятельности с привлечением дифференцирования и интегрирования функций, а также определять характеристики реальных объектов по разработанным моделям.

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Система R

Напомним, что рациональным числом называется число, представимое в виде отношения $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и $q \neq 0$.

Например, $\frac{3}{7}$; $-\frac{2}{5}$, $\frac{8}{1}$; $\frac{0}{9}$ и т. д.

Заметим, что одно и то же рациональное число может быть представлено в виде отношения различных целых чисел. Например, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$. Мы для удобства будем предполагать дробь $\frac{p}{q}$ несократимой.

Множество всех рациональных чисел будем обозначать буквой **R** и называть *системой* **R**.

Перечислим свойства системы **R**.

1. *Упорядоченность.* Если a и b — два рациональных числа, то обязательно имеет место одно и только одно из трех соотношений: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

При этом соотношения "<", "=", и ">" транзитивны (переносны). Именно, пусть $a, b, c \in \mathbf{R}$. Тогда:
если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$;
если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

2. *Плотность.* Если a и b — два неравных рациональных числа, то между a и b обязательно найдется хотя бы одно рациональное число. Например, $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Но тогда между числами a и c и между числами c и b также найдутся обязательно хотя бы по одному рациональному числу и т. д. Таким образом, мы приходим к выводу, что между двумя неравными рациональными числами a и b имеется бесконечное множество рациональных чисел. Отсюда следствия:

1) нельзя указать двух соседних рациональных чисел;

2) нельзя указать самое маленькое положительное рациональное число (между нулем и любым положительным рациональным числом есть другие положительные рациональные числа).

3. *Неограниченность.* В системе **R** нет ни наибольшего, ни наименьшего числа. Более того, для всякого $r \in \mathbf{R}$ найдутся числа m и n (даже целые) такие, что будет $m < r < n$.

§ 2. Сечения системы R

Пример 1. Возьмем число $\dfrac{2}{11}$ и разобьем систему **R** на два класса A и B, отнеся к классу A само число $\dfrac{2}{11}$ и все рациональные числа, меньшие, чем $\dfrac{2}{11}$, а к классу B — все рациональные числа, большие, чем $\dfrac{2}{11}$.

Ясно, что оба класса A и B не пусты; каждое рациональное число r попало либо в A, либо в B; если $a \in A$, $b \in B$, то $a < b$, т. е. всякое число из A меньше всякого числа из B. Ясно, далее, что в классе A имеется наибольшее число. Это $\dfrac{2}{11}$ ($\dfrac{2}{11} = \max A$). В классе B нет наименьшего числа ($\min B$ не существует по свойству 2).

Пример 2. Отнесем к классу A все рациональные числа, меньшие, чем $\dfrac{2}{11}$, а к классу B — само число $\dfrac{2}{11}$ и все рациональные числа, большие, чем $\dfrac{2}{11}$. Отметим, что и при таком разбиении системы на два класса A и B будем иметь: оба класса A и B не пусты;

каждое рациональное число r попало либо в A, либо в B. Только в этом примере $\min B$ существует ($\min B = \frac{2}{11}$), а $\max A$ существовать не будет (по свойству 2).

Лемма. Если m — целое число и если m^2 — число четное, то и само число m также четное.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что m — нечетное число, т. е. $m = 2n + 1$, где n — целое число. Но тогда $m^2 = 4n^2 + 4n + 1$ — число нечетное, что противоречит условию. ◀

Теорема. В системе **R** нет числа, квадрат которого равен 2.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что в системе **R** существует число r такое, что $r^2 = 2$. Запишем это число r в форме несократимой дроби: $r = \frac{p}{q}$ (p и q — целые, $q \neq 0$). Тогда $\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow p^2 = 2q^2$. Значит, p^2, а с ним по лемме и само p — число четное. Следовательно, число q — нечетное (*) (ибо дробь $\frac{p}{q}$ — несократимая). С другой стороны, раз p — число четное, то $p = 2m$, где m — целое число. А тогда равенство $p^2 = 2q^2$ принимает вид: $4m^2 = 2q^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow q^2 = 2m^2$. Значит, q^2, а с ним по лемме и само число q — четное, что противоречит (*). Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы. ◀

Пример 3. Разобьем систему **R** на два класса A и B, отнеся в класс A все отрицательные рациональные числа, число 0, а также те положительные рациональные числа a, квадрат которых меньше 2 (т. е. $a^2 < 2$). В класс B поместим все те положительные рациональные числа b, квадрат которых больше 2 (т. е. $b^2 > 2$). Например, $-3 \in A$; $-7 \in A$; $0 \in A$; $\frac{7}{5} \in A$; $\frac{3}{2} \in B$; $\frac{8}{5} \in B$; $2 \in B$. Ясно, что оба класса A и B не пусты и что каждое рациональное число попало либо в A, либо в B. Покажем, что всякое число из класса A меньше всякого числа из класса B. Действительно, пусть число a — любое из класса A, а b — любое число из класса B.

Если $a \leq 0$, то все ясно. Пусть $a > 0$. Но тогда $a^2 < 2$. Так как $b^2 > 2$, то имеем $b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (b - a)(b + a) > 0$. Откуда, сокращая на положительное число $b+a$, получаем $b-a>0$ и, следовательно, $b>a$.

Покажем, что в классе A нет наибольшего числа, т. е. что $\max A$ не существует.

Рассуждаем от противного. Допустим, что в A имеется число a_* такое, что $a_* = \max A$. Ясно, что $a_*>0$ и $a_*^2<2$, ибо $a_* \in A$. Введем в рассмотрение число:

$$\frac{2a_*+1}{2-a_*^2}. \tag{1}$$

Так как a_* — рациональное число, то число (1) — рациональное. У нас $a_*^2<2$. Следовательно, число (1) — положительное. По свойству неограниченности системы **R** обязательно найдется целое число n такое, что будет

$$n > \frac{2a_*+1}{2-a_*^2}. \tag{2}$$

Так как число (1) положительное, то и подавно $n>0$ (значит, $n \geq 1$). Из (2) находим: $2-a_*^2 > \frac{2a_*+1}{n} \Rightarrow 2 > a_*^2 + \frac{2a_*}{n} + \frac{1}{n}$. Следовательно, и подавно $2 > a_*^2 + \frac{2a_*}{n} + \frac{1}{n^2}$, или $2 > \left(a_* + \frac{1}{n}\right)^2$. Из последнего неравенства заключаем, что число $a_* + \frac{1}{n} \in A$. Так как $a_* + \frac{1}{n} > a_*$, то приходим к выводу, что a_* не есть $\max A$. Показано, таким образом, что в классе A нет наибольшего числа, т. е. что $\max A$ не существует.

Покажем теперь, что в классе B нет наименьшего числа, т. е. что $\min B$ не существует.

И здесь рассуждаем от противного. Допустим, что в B имеется число b_* такое, что $b_* = \min B$. Ясно, что $b_*>0$ и $b_*^2>2$. Введем в рассмотрение число

$$\frac{2b_*}{b_*^2-2}. \tag{3}$$

Так как b_* — рациональное число, то число (3) — рациональное. У нас $b_*^2 > 2$. Следовательно, число (3) — положительное. По свойству неограниченности системы **R** обязательно найдется целое число n такое, что будет

$$n > \frac{2b_*}{b_*^2 - 2}. \tag{4}$$

Отметим, что $n > 0$, ибо число (3) — положительное. (Значит, $n \geq 1$.) Из неравенства (4) находим: $b_*^2 - 2 > \frac{2b_*}{n} \Rightarrow b_*^2 - \frac{2b_*}{n} > 2$. Следовательно, и подавно $b_*^2 - \frac{2b_*}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$ или $\left(b_* - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$. Установим, что $b_* - \frac{1}{n} > 0$. Действительно, имеем (см. (4)): $n > \frac{2b_*}{b_*^2 - 2}$. Но $\frac{2b_*}{b_*^2 - 2} > \frac{2b_*}{b_*^2} = \frac{2}{b_*}$. Значит, и подавно $n > \frac{2}{b_*}$, а, следовательно, тем более $n > \frac{1}{b_*} \Rightarrow b_* > \frac{1}{n} \Rightarrow b_* - \frac{1}{n} > 0$. Так как $b_* - \frac{1}{n} > 0$ и $\left(b_* - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$, то заключаем, что $b_* - \frac{1}{n} \in B$. Но $b_* - \frac{1}{n} < b_*$. Поэтому приходим к выводу, что b_* не есть $\min B$. Показано, таким образом, что в классе B нет наименьшего числа, т. е. что $\min B$ не существует.

Определение. *Сечением системы* **R** называется такое разбиение **R** на два класса A и B, чтобы:

1) оба эти класса были не пустыми,

2) всякое рациональное число попадало либо в A, либо в B,

3) каждое число класса A было меньше каждого числа класса B.

$A \mid B$ — обозначение сечения. A называется нижним или левым классом сечения. B называется верхним или правым классом сечения.

Формально мыслимы следующие типы сечений системы **R**.

№	$\max A$	$\min B$
1-й тип	существ.	не существ.
2-й тип	не существ.	существ.
3-й тип	не существ.	не существ.
4-й тип	существ.	существ.

Однако сечений типа 4 не бывает. Действительно, если бы $A \mid B$ было таким сечением, то одновременно существовали бы числа $a_* \in A$ и $b_* \in B$ такие, что $a_* = \max A$ и $b_* = \min B$. Так как $a_* \in A$, а $b_* \in B$, то по определению сечения системы **R** должно быть: $a_* < b_*$. По свойству плотности системы **R** между числами a_* и b_* содержится бесконечное множество рациональных чисел, каждое из которых не попадало бы ни в класс A, ни в класс B, что невозможно по определению сечения системы **R**. Отметим, что у нас в примере 1 реализуется первый тип; в примере 2 — второй тип; в примере 3 — третий тип сечений системы **R**.

Замечание. Сечения третьего типа системы **R** будем называть *щелями* системы **R**.

§ 3. Система W

Определение. Каждой щели $A \mid B$ системы **R** соотносится некоторый символ x, y, z,..., который называется *иррациональным числом*, определяемым этой щелью.

Про это число условились считать, что оно больше всех рациональных чисел из A и меньше всех рациональных чисел из B. Если иррациональное число z определяется щелью $A \mid B$, то пишут $z = A \mid B$. (Щели системы **R** — суть иррациональные числа.)

Множество всех рациональных и иррациональных чисел будем обозначать буквой **W**, а сами эти числа называть *вещественными числами*.

Определение. Пусть $x = A_x \mid B_x$ и $y = A_y \mid B_y$ — два иррациональных числа.

1. Числа x и y называются *равными*, если совпадают нижние классы определяющих их сечений, т. е. если $A_x = A_y$ (тогда сами собой совпадут и верхние классы, т. е. $B_x = B_y$).

2. Если $A_x \neq A_y$, но A_x содержится в A_y ($A_x \subset A_y$), то говорят, что $x < y$ (или $y > x$). (Иначе: из двух иррациональных чисел большим называется то число, у которого нижний класс обширней).

Напомним, что при рассмотрении системы **R** мы исходили из того, что читателю известны (из курса элементарной математики) правила сравнения рациональных чисел, а также правила образования суммы и произведения рациональных чисел и их свойства.

Установим теперь свойства системы **W**.

1. *Упорядоченность.* Если x и y — два вещественных числа, то между ними обязательно имеет место одно и только одно из трех соотношений: $x = y$, $x < y$, $x > y$.

▶ Возможны случаи:

№	x	y
1	рац.	рац.
2	рац.	иррац.
3	иррац.	рац.
4	иррац.	иррац.

В случае № 1 это свойство нам известно (см. § 1).

Рассмотрим случай № 2. В этом случае y определяется щелью $A_y \mid B_y$ системы $\mathbf{R}$ ($y = A_y \mid B_y$) и каждое рациональное число попадает либо в A_y, либо в B_y. В частности, это так и для рационального числа x. Но если $x \in A_y$, то $x < y$, а если $x \in B_y$, то $x > y$. Итак, из соотношений $x < y$ и $x > y$ одно обязательно реализуется и друг друга они исключают. Равенства же $x = y$ в случае № 2 быть не может.

Случай № 3 аналогичен случаю № 2. Поэтому переходим к рассмотрению случая № 4, когда x и y — иррациональные числа.

Пусть x определяется щелью $A_x \mid B_x$, а y — щелью $A_y \mid B_y$ системы $\mathbf{R}$ (т. е. $x = A_x \mid B_x$, $y = A_y \mid B_y$).

Если $A_x = A_y$, то $x = y$, а соотношения $x < y$ и $x > y$ отпадают.

Пусть $A_x \neq A_y$. (Тогда автоматически отпадает: $x = y$.) Это означает, что один из классов A_x, A_y содержит хотя бы одно рациональное число, которого нет в другом.

1) Пусть для определенности существует рациональное число r такое, что $r \in A_y$ и $r \bar{\in} A_x$. Покажем, что тогда $A_x \subset A_y$. Для этого берем любое число a из класса A_x ($a \in A_x$). У нас $r \bar{\in} A_x$, значит, $r \in B_x$. Так как $a \in A_x$, а $r \in B_x$, то $a < r$. Но $r \in A_y$, следовательно, и подавно $a \in A_y$ (ибо иначе $a \in B_y$ и было бы $a > r$, чего нет). Итак, из того, что $a \in A_x$ мы вывели, что $a \in A_y$, а это и означает, что $A_x \subset A_y$. Так как $A_x \neq A_y$ и $A_x \subset A_y$, то получаем $x < y$ (соотношение $x > y$ отпадает).

2) Если предположить для определенности, что существует рациональное число r такое, что $r \in A_x$ и $r \bar{\in} A_y$, то совершенно аналогичным образом можно показать, что $A_y \subset A_x$ и, следовательно, $x > y$ (а соотношение $x < y$ отпадает). ◀

Теорема (о транзитивности знака "<"). Если x, y и z — три вещественных числа и $x < y$, а $y < z$, то обязательно будет $x < z$.

Возможны случаи:

№	x	y	z
1	рац.	рац.	рац.
2	рац.	рац.	иррац.
3	рац.	иррац.	рац.
4	иррац.	рац.	рац.
5	рац.	иррац.	иррац.
6	иррац.	рац.	иррац.
7	иррац.	иррац.	рац.
8	иррац.	иррац.	иррац.

В случае № 1 утверждение теоремы справедливо (см. § 1). Обсудим для примера случай № 8.

Дано: 1) x, y, z — иррациональные числа, определяемые соответственно щелями $A_x \mid B_x$, $A_y \mid B_y$, $A_z \mid B_z$ системы **R**; 2) $x < y$ ($\Leftrightarrow$ $A_x \neq A_y$ и $A_x \subset A_y$); $y < z$ ($\Leftrightarrow$ $A_y \neq A_z$ и $A_y \subset A_z$). Доказать, что $x < z$ ($\Leftrightarrow$ $A_x \neq A_z$ и $A_x \subset A_z$).

▶ По условию $A_x \subset A_y$ и $A_y \subset A_z$. Но тогда ясно, что $A_x \subset A_z$.

По условию $A_y \neq A_z$ и $A_y \subset A_z$. Это означает, что в A_z имеется хотя бы один элемент, не входящий в A_y, и тем более не входящий в A_x (у нас $A_x \subset A_y$). Последнее означает, что $A_x \neq A_z$.

Итак, показано, что $A_x \neq A_z$ и $A_x \subset A_z$. Значит, $x < z$. ◀

В качестве упражнения предлагается самостоятельно рассмотреть оставшиеся шесть случаев.

2. *Неограниченность.* В системе **W** нет ни наибольшего, ни наименьшего числа. Более того, для всякого $z \in \mathbf{W}$ найдутся числа m и n (даже целые) такие, что будет: $m < z < n$.

▶ Если z — рациональное число, то это свойство нам известно (см. § 1).

Пусть z — иррациональное число, т. е. z определяется щелью $A_z \mid B_z$ системы **R**, где классы A_z и B_z не пусты. Так как класс A_z не пустой, то существует хотя бы одно рациональное число a такое, что $a \in A_z$. По свойству неограниченности системы **R** обязательно найдется число m (даже целое) такое, что будет: $m < a$.

Итак, $m < a$ и $a < z$. Отсюда, по свойству транзитивности, получаем $m < z$.

Так как класс B не пустой, то существует хотя бы одно рациональное число b такое, что $b \in B_z$. Но тогда, по свойству неограниченности системы R, обязательно найдется число n (даже целое) такое, что будет: $b < n$.

Итак, $z < b$ и $b < n$. Отсюда $z < n$.

Таким образом, нашлись числа m и n (даже целые) такие, что: $m < z < n$. ◀

3. *Плотность.* Если x и y — два неравных вещественных числа, то между ними обязательно найдется хотя бы одно вещественное (даже рациональное) число (а значит, и бесконечное множество вещественных чисел).

▶ Пусть для определенности $x < y$. Возможны случаи:

№	x	y
1	рац	рац
2	рац	иррац.
3	иррац.	рац.
4	иррац.	иррац.

В случае № 1 это свойство нам известно (см. § 1).

В случае № 2: y — иррациональное число, определяемое щелью $A_y \mid B_y$ системы **R**. Так как $x < y$, то $x \in A_y$ (x — рациональное число, по условию). Так как сечение $A_y \mid B_y$ системы **R** есть щель, то в классе A_y нет наибольшего рационального числа, а потому и x не есть $\max A_y$ и, следовательно, в A_y обязательно найдется рациональное число r такое, что будет $r > x$. Так как $r \in A_y$, то $r < y$. Таким образом, получили: $x < r < y$, а это и требовалось доказать.

Заметим, что случай № 3 обсуждается аналогично случаю № 2. Поэтому станем рассматривать случай № 4.

В этом случае x и y — иррациональные числа, определяемые соответственно щелями $A_x \mid B_x$ и $A_y \mid B_y$ системы **R**. У нас по условию $x < y$. Это означает, что $A_x \neq A_y$ и $A_x \subset A_y$. Но тогда обязательно найдется хотя бы одно рациональное число r такое, что будет: $r \in A_y$ и $r \overline{\in} A_x$. В сечении $A_x \mid B_x$ число r не пустили в A_x; значит, r попало в B_x. Следовательно, $x < r$. У нас $r \in A_y$, значит, $r < y$.

Таким образом, получили: $x < r < y$, а это и требовалось доказать. ◀

Определение. Сечением системы **W** называется такое разбиение **W** на два класса X и Y, чтобы:

1) оба эти класса были не пустыми;

2) всякое вещественное число попадало либо в X, либо в Y;

3) каждое число класса X было меньше каждого числа класса Y.

$X \mid Y$ — обозначение сечения системы **W**.

4. *Непрерывность* системы **W**.

В системе **W** нет щелей.

Иначе: если $X \mid Y$ есть некоторое сечение системы **W**, то обязательно существует одно из чисел: $\max X$ или $\min Y$, причем оба они одновременно существовать не могут.

▶ Невозможность одновременного существования $\max X$ и $\min Y$ вытекает из свойства плотности системы **W**. Действительно, допустим, что существуют одновременно вещественные числа $x_* \in X$ и $y_* \in Y$ такие, что $x_* = \max X$, $y_* = \min Y$. Так как $x_* \in X$, а $y_* \in Y$, то по определению сечения системы **W** должно быть: $x_* < y_*$. По свойству плотности системы **W** между числами x_* и y_* содержится бесконечное множество вещественных чисел, каждое из которых не попадает ни в класс X, ни в класс Y, что невозможно по определению сечения системы **W**. К такому противоречию мы пришли, предположив, что $\max X$ и $\min Y$ существуют одновременно. Значит, $\max X$ и $\min Y$ одновременно существовать не могут.

Пусть $X \mid Y$ — некоторое сечение системы **W**.

Обозначим через A множество тех рациональных чисел, которые содержатся в классе X, а через B — множество тех рациональных чисел, которые содержатся в классе Y. Отметим, что каждое рациональное число попадет при этом либо в A, либо в B.

Заметим, далее, что множества A и B не пусты. В самом деле, по определению сечения системы **W**, класс X не пустой. Значит, имеется хотя бы одно вещественное число x_0 такое, что $x_0 \in X$. А тогда, по свойству неограниченности системы **W**, обязательно найдется число m (даже целое) такое, что будет $m < x_0$. Ясно, что $m \in A$ и, следовательно, множество A не пустое.

Совершенно аналогично устанавливается, что и множество B не пустое.

Так как каждое вещественное число из класса X меньше каждого вещественного числа из класса Y, то всякое рациональное число из A меньше всякого рационального числа из B.

Видим, что полученное указанным выше способом разложение системы **R** на A и B является сечением $A \mid B$ системы **R**.

Отметим, что при этом обязательно реализуется одна и только одна из следующих трех возможностей:

1) существует $\max A$ (если реализуется эта возможность, то обозначаем $\max A = \gamma$);

2) существует $\min B$ (если реализуется эта возможность, то обозначаем $\min B = \gamma$);

3) $A \mid B$ есть щель системы **R**, определяющая иррациональное число γ.

Отметим, что в случаях 1) и 2) γ есть рациональное число, а в случае 3) γ — число иррациональное.

Важно подчеркнуть, что в любом из этих трех случаев γ есть вещественное число, обладающее следующим свойством: всякое рациональное число, меньшее чем γ, попадает в класс A, а всякое рациональное число, большее чем γ, попадает в класс B (о самом числе γ мы ничего не говорим). Будучи числом вещественным, γ попадает либо в класс X, либо в класс Y. Пусть для определенности $\gamma \in X$. Покажем, что тогда $\gamma = \max X$.

Предположим, что это не так, т. е. что γ не есть $\max X$. Но тогда существует вещественное число $\tilde{x}$, такое, что $\tilde{x} \in X$ и $\tilde{x} > \gamma$. По свойству плотности системы **W** существует рациональное число r такое, что $\tilde{x} > r > \gamma$. Так как всякое рациональное число, большее чем γ, попадает в класс B, то должно быть: $r \in B$, а значит, $r \in Y$. Но $\tilde{x} > r$. Поэтому и подавно $\tilde{x} \in Y$, а это невозможно, ибо $\tilde{x} \in X$. К этому противоречию мы пришли, предположив, что γ не есть $\max X$. Следовательно, $\gamma = \max X$. Совершенно аналогично устанавливается, что если $\gamma \in Y$, то $\gamma = \min Y$. (Предлагается доказать это самостоятельно в качестве упражнения.)

§ 4. Границы числовых множеств

Определение. Пусть $E = \{t\}$ есть непустое числовое множество. Если существует число M такое, что ни один элемент множества E его не превосходит, т. е. если для всех $t \in E$ оказывается: $t \le M$, то говорят, что множество E ограничено сверху, а число M называют верхней границей множества E.

Следует заметить, что если число M есть верхняя граница множества E, то и любое число, большее чем M, будет верхней границей этого множества. Следовательно, если непустое числовое множество $E = \{t\}$ ограничено сверху, то у этого множества имеется бесконечное множество верхних границ.

Теорема. Если непустое числовое множество ограничено сверху, то среди его верхних границ имеется наименьшая.

▶ Пусть $E = \{t\}$ — непустое и ограниченное сверху числовое множество. Пользуясь множеством E, разобьем систему **W** на два класса X и Y. Делать это мы будем так: берем любое вещественное число z; если для всех $t \in E$ оказывается, что $t \leq z$, то отправляем это число z в класс Y; если же в E найдется хотя бы один элемент t_* такой, что $t_* > z$, то число z включается в класс X. Легко понять, что при таком разбиении системы **W** класс Y будет представлять собой множество всех верхних границ множества E.

Поэтому теорема будет доказана, если мы докажем, что существует $\min Y$. По свойству непрерывности системы **W** одно из чисел $\max X$ или $\min Y$ обязательно существует, причем оба они одновременно существовать не могут. Следовательно, мы докажем, что $\min Y$ существует, если покажем, что не существует $\max X$.

Рассуждаем от противного. Допустим, что $\max X$ существует, и пусть $\max X = x_0$ ($x_0 \in X$). Соотношение $x_0 \in X$ означает, что существует элемент $t_0 \in E$ такой, что $t_0 > x_0$. По свойству плотности системы **W**, обязательно найдется хотя бы одно вещественное число z такое, что $x_0 < z < t_0$. Из того, что $z < t_0$ следует, что $z \in X$. А так как $z > x_0$, то x_0 не есть $\max X$. Полученная нелепость опровергает существование $\max X$, а это и требовалось доказать. ◀

Определение. Пусть $E = \{t\}$ — непустое, ограниченное сверху числовое множество. Наименьшая из всех верхних границ этого множества называется *точной* верхней границей, или *супремумом*, и обозначается $\sup E$.

Замечание. Если непустое числовое множество E сверху не ограничено, то пишут $\sup E = +\infty$.

Свойства супремума.

Пусть $E = \{t\}$ — непустое числовое множество и $b = \sup E$. Тогда:

1. Для всех $t \in E$ оказывается $t \leq b$.

2. Если $b_* < b$, то b_* уже не есть верхняя граница E и, следовательно, найдется хотя бы одно $t_* \in E$ такое, что $t_* > b_*$.

3. Если для всех $t \in E$ оказывается $t \leq B$, то и $b \leq B$ (B — верхняя граница множества E, а b — наименьшая из верхних границ множества E).

4. Если $E_0 \subset E$ (E_0 — часть E) и $b_0 = \sup E_0$, то $b_0 \leq b$ (при расширении числового множества его супремум не уменьшается).

5. Если $b \in E$, то $b = \max E$, а если $b \notin E$, то $\max E$ не существует.

Определение. Пусть $E = \{t\}$ — непустое числовое множество. Если существует число L такое, что для всех $t \in E$ оказывается

$t \geq L$, то говорят, что множество E ограничено снизу, а число L называют нижней границей множества E.

Заметим, что если число L есть нижняя граница множества E, то и любое число, меньшее чем L, будет нижней границей этого множества. Следовательно, если непустое числовое множество $E = \{t\}$ ограничено снизу, то у него имеется бесконечное множество нижних границ.

Теорема. Если непустое числовое множество ограничено снизу, то среди его нижних границ имеется наибольшая.

▶ Пусть $E = \{t\}$ — непустое и ограниченное снизу числовое множество. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, пользуясь множеством E, разложим систему **W** на два класса X и Y. Делать это мы будем следующим образом: берем любое вещественное число z; если для всех $t \in E$ оказывается, что $t \geq z$, то отправляем это число z в класс X; если же в E найдется хотя бы один элемент $\tilde{t}$ такой, что $\tilde{t} < z$, то отправляем число z в класс Y. При таком разложении системы **W** класс X будет представлять собой множество всех нижних границ множества E. Теорема будет доказана, если мы покажем, что существует $\max X$. По свойству непрерывности системы **W**, одно из чисел $\max X$ или $\min Y$ обязательно существует, причем оба они одновременно существовать не могут. Следовательно, мы докажем, что $\max X$ существует, если покажем, что не существует $\min Y$.

Рассуждаем от противного. Допустим, что $\min Y$ существует и пусть $y_0 = \min Y$ ($y_0 \in Y$). Соотношение $y_0 \in Y$ означает, что существует элемент $t_0 \in E$ такой, что $t_0 < y_0$. По свойству плотности системы **W** обязательно найдется хотя бы одно вещественное число z такое, что $t_0 < z < y_0$.

Из того, что $z > t_0$, следует $z \in Y$. А так как $z < y_0$, то y_0 не есть $\min Y$. Полученное противоречие опровергает существование $\min Y$, а это и требовалось доказать. ◀

Определение. Пусть $E = \{t\}$ — непустое, ограниченное снизу числовое множество.

Наибольшая из нижних границ этого множества называется *точной* нижней границей, или *инфимумом*, и обозначается $\inf E$.

Замечание. Если непустое числовое множество E снизу не ограничено, то пишут $\inf E = -\infty$.

Свойства инфимума.

Пусть $E = \{t\}$ — непустое числовое множество и $a = \inf E$. Тогда:

1. Для всех $t \in E$ оказывается $t \geq a$.

2. Если $a_* > a$, то a_* уже не есть нижняя граница E и, следовательно, найдется хотя бы одно $t_* \in E$ такое, что $t_* < a_*$.

3. Если для всех $t \in E$ оказывается $t \geq A$, то $A \leq a$ (A — нижняя граница множества E, a — наибольшая из нижних границ множества E).

4. Если $E_0 \subset E$ и $a_0 = \inf E_0$, то $a \leq a_0$ (при расширении числового множества его инфимум не увеличивается).

5. Если $a \in E$, то $a = \min E$; если же $a \overline{\in} E$, то $\min E$ не существует.

Примеры.

1. Пусть $E = \{2, 6, 1, 9, 8\}$. Здесь:

$\sup E = 9$, $\sup E \in E$, $9 = \max E$;

$\inf E = 1$, $\inf E \in E$, $1 = \min E$.

2. Пусть $E = (3; 7)$. Здесь:

$\sup E = 7$, $\sup E \overline{\in} E$, $\max E$ не существует;

$\inf E = 3$, $\inf E \overline{\in} E$, $\min E$ не существует.

3. Пусть $E = (4; 5]$. Здесь:

$\sup E = 5$, $\sup E \in E$, $5 = \max E$;

$\inf E = 4$, $\inf E \overline{\in} E$, $\min E$ не существует.

4. Пусть $E = \{t, t < 0\}$. Здесь:

$\sup E = 0$, $\sup E \overline{\in} E$, $\max E$ не существует;

$\inf E = -\infty$, $\inf E \overline{\in} E$, $\min E$ не существует.

5. Пусть $E = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathrm{N}} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Здесь:

$\sup E = 1$, $\sup E \in E$, $1 = \max E$;

$\inf E = 0$, $\inf E \overline{\in} E$, $\min E$ не существует.

§ 5. Понятие об арифметике в системе W

1. Знак числа. Любые два вещественных числа сравнимы по величине (см. свойство упорядоченности системы W). Следовательно, любое вещественное число сравнимо с нулем. Говорят, что z — положительно, если $z > 0$, и z — отрицательно, если $z < 0$.

2. Противоположные числа. Пусть z — иррациональное число, определяемое щелью $A \mid B$ системы **R**. Построим новое сечение $A^* \mid B^*$ системы **R**, отнеся рациональное число r в нижний класс A^*, если $-r \in B$ и отнеся r в верхний класс B^*, если $-r \in A$. Можно доказать, что сечение $A^* \mid B^*$ является щелью системы **R**. Эта щель определяет иррациональное число z^*, которое называется числом, *противоположным* числу z и обозначается: $-z$.

3. Сложение вещественных чисел. Пусть z_1 и z_2 — два вещественных числа. Рассмотрим всевозможные рациональные числа a, которые можно записать в виде $a = r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 — рациональные числа такие, что $r_1 \le z_1$ и $r_2 \le z_2$.

Заметим, что множество $E = \{a\}$ всех таких рациональных чисел a ограничено сверху. Действительно, по свойству неограниченности системы **W** существуют целые числа n_1 и n_2 такие, что $z_1 < n_1$ и $z_2 < n_2$. У нас $r_1 \le z_1$ и $r_2 \le z_2$. Стало быть, $r_1 + r_2 < n_1 + n_2$, т. е. число $n_1 + n_2$ оказывается верхней границей множества $E = \{a\}$. Так как непустое множество $E = \{a\}$ ограничено сверху, то существует $\sup E$. Положим $z^* = \sup E$. Это число z^* называется *суммой* чисел z_1 и z_2 и обозначается $z^* = z_1 + z_2$.

Замечания.

1) Можно доказать, что в том случае, когда оба слагаемых z_1 и z_2 — рациональные числа, новое определение их суммы приводит к тому же результату, что и известное из элементарной математики определение суммы рациональных чисел.

2) Из определения суммы вещественных чисел z_1 и z_2 ясно, что $z_2 + z_1 = z_1 + z_2$.

3) Пусть z_1 и z_2 — два вещественных числа. Их *разностью* называется сумма $z_1 + (-z_2)$, т. е. сумма числа z_1 и числа $-z_2$, противоположного числу z_2.

4. Умножение вещественных чисел. Определим сначала произведение двух положительных вещественных чисел z_1 и z_2.

Пусть r_1 и r_2 — положительные рациональные числа, любые, но такие, что $r_1 \le z_1$, $r_2 \le z_2$. Рассмотрим множество $E = \{a\}$, где $a = r_1 \cdot r_2$. Отметим, что множество $E = \{a\}$ ограничено сверху. В самом деле, по свойству неограниченности системы **W** существуют целые числа n_1 и n_2 такие, что $z_1 < n_1$ и $z_2 < n_2$. У нас $r_1 \le z_1$; $r_2 \le z_2$. Следовательно, и подавно $r_1 < n_1$; $r_2 < n_2$. А тогда $a = r_1 \cdot r_2 < n_1 \cdot n_2$. Видим, что число $n_1 \cdot n_2$ оказывается верхней границей множества $E = \{a\}$. Так как непустое множество $E = \{a\}$ ограничено сверху, то существует $\sup E$. Положим $\tilde{z} = \sup E$. Это число $\tilde{z}$ называется *произведением* чисел z_1 и z_2 и обозначается $\tilde{z} = z_1 \cdot z_2$.

Произведение вещественных чисел z_1 и z_2 любого знака определяется по следующему правилу:

1) считают, что $z_1 \cdot 0 = 0 \cdot z_1 = 0$;

2) считают, что $z_1 \cdot z_2 = \begin{cases} |z_1| \cdot |z_2|, & \text{если } z_1 \text{ и } z_2 \text{ одного знака;} \\ -|z_1| \cdot |z_2|, & \text{если } z_1 \text{ и } z_2 \text{ разных знаков.} \end{cases}$

Замечания.

1) Можно доказать, что в том случае, когда оба сомножителя z_1 и z_2 — рациональные числа, новое определение их произведения и известное из элементарной математики определение произведения рациональных чисел приводят к одному и тому же результату.

2) Пусть z_1 и z_2 — два вещественных числа, любые, но такие, что $z_2 \neq 0$. Их *частным* $\frac{z_1}{z_2}$ называется вещественное число z^*, удовлетворяющее условию $z^* \cdot z_2 = z_1$.

3) Пусть z — вещественное число, отличное от нуля. Число $\tilde{z}$, *обратное* числу z, равно частному $\frac{1}{z}$.

Можно доказать, что для вещественных чисел сохраняются все правила алгебры, относящиеся к арифметическим действиям над рациональными числами.

5. Приближение вещественных чисел десятичными дробями. Пусть z — произвольное вещественное число (пусть для определенности $z \geq 0$). По свойству неограниченности системы **W** существует целое число n_0 такое, что $z < n_0$. Среди чисел $n = 1, 2, 3, \ldots, n_0$ возьмем наименьшее, обладающее свойством $n > z$, и обозначим его $\alpha_0 + 1$. Будем иметь тогда $\alpha_0 \leq z < \alpha_0 + 1$.

Разобьем отрезок $I_0 = [\alpha_0; \alpha_0 + 1]$ на десять равных отрезков, т. е. рассмотрим отрезки

$$\left[\alpha_0; \alpha_0 + \frac{1}{10}\right], \left[\alpha_0 + \frac{1}{10}; \alpha_0 + \frac{2}{10}\right], \ldots, \left[\alpha_0 + \frac{9}{10}; \alpha_0 + 1\right] \qquad (*)$$

Могут реализоваться две возможности: либо число z не совпадает ни с одним из чисел $\alpha_0 + \frac{1}{10}$, $\alpha_0 + \frac{2}{10}$, ..., $\alpha_0 + \frac{9}{10}$, либо число z совпадает с одним из этих чисел.

В первом случае число z принадлежит только одному из отрезков (*). Обозначим этот отрезок через $I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right]$, где α_1 обозначает номер отрезка, т. е. одну из цифр 0, 1, 2,...,9.

Во втором случае число z может принадлежать двум соседним отрезкам из (*). Обозначим тогда через $I_1 = \left[\alpha_0,\alpha_1; \alpha_0,\alpha_1 + \frac{1}{10}\right]$ тот из этих двух отрезков, для которого число z является его левым концом. Отметим, что во всех случаях число $z \in I_1$.

Затем разобьем отрезок I_1 на десять равных отрезков и обозначим через $I_2 = \left[\alpha_0,\alpha_1\alpha_2; \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right]$ тот из получившихся отрезков, который содержит число z и для которого число z не является его правым концом (α_2 обозначает номер отрезка, т. е. одну из цифр $0, 1, 2, ..., 9$.)

Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим на n-м шаге отрезок $I_n = \left[\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n; \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right]$, где α_n обозначает номер отрезка, т. е. одну из цифр $0, 1, 2, \dots, 9$. I_n — тот из отрезков, который содержит число z. Так как $z \in I_n$, то справедливо неравенство

$$\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n \le z \le \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{1}{10^n}.$$

Полученные неравенства означают, что вещественное число z заключено между двумя десятичными дробями, разность между которыми равна $\frac{1}{10^n}$. При этом номер n можно взять любой.

Поэтому, если требуется найти приближенное значение числа z с ошибкой, не превосходящей любого, наперед заданного положительного рационального числа ε, нужно взять наименьший номер n, с которого выполняется неравенство $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$.

6. Некоторые часто употребляемые соотношения. Вспомним, что абсолютная величина вещественного числа α обозначается символом $|\alpha|$ и определяется условиями:

$$|\alpha| = \alpha, \text{ если } \alpha \ge 0, \text{ и } |\alpha| = -\alpha, \text{ если } \alpha < 0.$$

Из определения сразу следует, что

$$|\alpha| \ge 0; \ |\alpha| = |-\alpha|; \ \alpha \le |\alpha|; \ -\alpha \le |\alpha|.$$

1. Докажем, что для любых вещественных чисел α и β неравенство

$$|\alpha| < \beta \tag{1}$$

равносильно двойному неравенству

$$-\beta < \alpha < \beta. \tag{2}$$

▶ Покажем сначала, что из неравенства (1) следует неравенство (2). Доказательство проводится проверкой двух случаев: a) когда $\alpha \geq 0$ и b) когда $\alpha < 0$.

a) Пусть $\alpha \geq 0$. В этом случае по определению $|\alpha| = \alpha$, и неравенство (1) означает, что $\alpha < \beta$. Так как неотрицательное число α больше любого отрицательного числа, то $\alpha > -\beta$. Следовательно, в этом случае имеем

$$-\beta < \alpha < \beta.$$

b) Пусть $\alpha < 0$. В этом случае по определению $|\alpha| = -\alpha$, и неравенство (1) означает, что $-\alpha < \beta$, т. е. $\alpha > -\beta$. Так как отрицательное число α меньше любого положительного числа, то $\alpha < \beta$. Следовательно, и в этом случае имеем

$$-\beta < \alpha < \beta.$$

Покажем теперь, что из неравенства (2) следует неравенство (1). Двойное неравенство $-\beta < \alpha < \beta$ означает, что $\alpha < \beta$ и $-\beta < \alpha$, т. е. что $\alpha < \beta$ и $-\alpha < \beta$. А так как одно из чисел α или $-\alpha$ есть $|\alpha|$, то получаем $|\alpha| < \beta$.

Замечание. Совершенно аналогично устанавливается, что неравенство $|\alpha| \leq \beta$ равносильно неравенству $-\beta \leq \alpha \leq \beta$.

2. Докажем, что для любых вещественных чисел α и β

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|,$$

т. е. абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых.

▶ Напишем очевидные неравенства:

$$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|,$$
$$-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|,$$

и сложим их почленно. Получим двойное неравенство

$$-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq (|\alpha| + |\beta|).$$

Это двойное неравенство по пункту 1 равносильно неравенству

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \blacktriangleleft$$

3. Докажем, что для любых вещественных чисел α и β

$$|\alpha-\beta| \geq |\alpha|-|\beta|,$$

т. е. абсолютная величина разности не меньше разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого.

▶ Имеем $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$. Отсюда по пункту 2 получаем

$$|\alpha| \leq |\alpha-\beta| + |\beta| \Rightarrow |\alpha-\beta| \geq |\alpha| - |\beta| . ◀$$

4. Для любых вещественных чисел α и β справедливо соотношение

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|,$$

т. е. абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей.

5. Для любого вещественного числа α и для любого отличного от нуля вещественного числа β справедливо соотношение

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \; (\beta \neq 0),$$

т. е. абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя при условии, что делитель отличен от нуля.

Справедливость утверждений 4 и 5 установить самостоятельно в качестве упражнения.

7. Некоторые конкретные множества вещественных чисел. Перечислим некоторые наиболее употребительные множества вещественных чисел.

1. *Замкнутый промежуток* или *отрезок*. Это — множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам

$$a \leq x \leq b, \text{ где } a < b.$$

Обозначение: $[a, b]$. Числа a и b будем называть *концами* отрезка $[a, b]$, а любое число x, удовлетворяющее неравенствам $a < x < b$ будем называть внутренней точкой отрезка $[a, b]$.

2. *Открытый промежуток* или *интервал*. Это — множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам

$$a < x < b, \text{ где } a < b.$$

Обозначение: (a, b).

3. *Полуоткрытый промежуток* или *полуинтервал*. Это — множество вещественных чисел x, удовлетворяющих одному из неравенств:

$$a \leq x < b \text{ (обозначение: } [a,b) \text{)}$$

или

$$a < x \leq b \text{ (обозначение: } (a,b] \text{)}.$$

4. Множество всех вещественных чисел x будем называть *числовой прямой* и обозначать символом: $(-\infty, +\infty)$.

5. *Открытой полупрямой* будем называть множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих одному из неравенств:

$$x > a \quad (\text{обозначение: } (a, +\infty)),$$

или

$$x < b \quad (\text{обозначение: } (-\infty, b)).$$

6. *Полупрямой* будем называть множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих одному из неравенств:

$$x \geq a \quad (\text{обозначение: } [a, +\infty)),$$

или

$$x \leq b \quad (\text{обозначение: } (-\infty, b].$$

Замечание. Иногда мы будем пользоваться общим обозначением для множеств вещественных чисел, перечисленных в пунктах 1—6, а именно, символом $\langle a, b\rangle$. Короче: $\langle a, b\rangle$ — общее обозначение для промежутков $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$.

Глава 2

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Числовые последовательности

Определение. Если каждому числу n натурального ряда чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ по определенному закону ставится в соответствие некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных вещественных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

называется *числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*).

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются *элементами* или *членами* последовательности (1).

Сокращенно последовательность (1) будем обозначать символом $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$. Так, например, символ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ обозначает последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Общий член последовательности (1), т. е. величину x_n, конкретными значениями которой являются числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, называют также переменной величиной, пробегающей эту последовательность значений.

Рассмотрим несколько примеров последовательностей.

1. $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}} = \left\{5 + \frac{1}{2^n}\right\}$. На рис. 2.1 представлена схема расположения элементов этой последовательности на числовой оси.

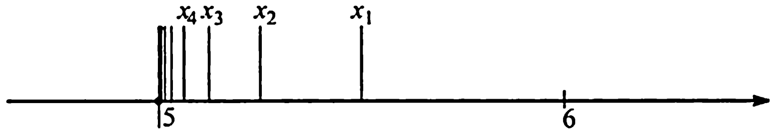


Рис. 2.1. К примеру 1

В этом примере все элементы x_n последовательности располагаются правее точки $a = 5$. Возьмем число $5.1 = 5 + \frac{1}{10}$. Нетрудно понять, что все члены последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$, у которых номер n больше трех, т. е. $x_4, x_5, \dots$ будут отличаться от числа $a = 5$ меньше, чем на $\frac{1}{10}$ (ибо $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10}$ при $n > 3$). Возьмем число $5.01 = 5 + \frac{1}{100}$.

Все члены последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$, у которых номер n больше шести, т. е. $x_7, x_8, \dots$, будут отличаться от числа $a = 5$ меньше, чем на $\frac{1}{100}$ (ибо $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$ при $n > 6$).

И вообще, если взять любое сколь угодно малое положительное число ε, то можно указать номер N такой, что все x_n, у которых номер n больше, чем N, будут отличаться от числа $a = 5$ меньше, чем на ε. (В качестве N следует взять наименьшее натуральное число такое, чтобы при $n > N$ было: $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.)

2. $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \left\{5 - \frac{1}{2^n}\right\}_{n \in \mathrm{N}}$. На рис. 2.2 представлена схема расположения элементов этой последовательности на числовой оси.

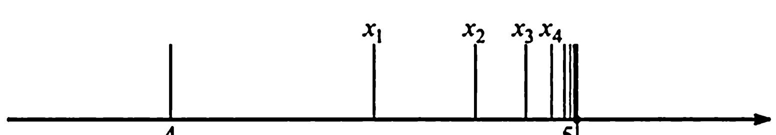


Рис. 2.2. К примеру 2

В этом примере все элементы x_n последовательности располагаются левее точки $a = 5$ (т. е. $x_n < 5$ для любого $n \in \mathrm{N}$).

Возьмем число $4.9 = 5 - \frac{1}{10}$. Все члены последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$, у которых номер n больше трех, т. е. $x_4, x_5, \ldots$ будут удовлетворять неравенству $|x_n - 5| < 0.1$, так как $\frac{1}{2^n} < 0.1$ при $n > 3$, т. е. $x_4, x_5, \ldots$ будут отличаться от числа $a = 5$ меньше, чем на 0.1.

Возьмем число $4.99 = 5 - \frac{1}{100}$. Все члены последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$, у которых номер n больше, чем 6, т. е. $x_7, x_8, \ldots$ будут удовлетворять неравенству $|x_n - 5| < 0.01$, так как $\frac{1}{2^n} < 0.01$ при $n > 6$.

И вообще, если взять любое сколь угодно малое положительное число ε, то можно указать номер N такой, что все x_n, у которых номер n больше, чем N, будут удовлетворять неравенству $|x_n - 5| < \varepsilon$. (В качестве N следует взять наименьшее натуральное число такое, чтобы при $n > N$ было: $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.)

3. $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \left\{5 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n \in \mathrm{N}}$. На рис. 2.3 представлена схема расположения элементов этой последовательности на числовой оси.

И в этом примере все члены последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$, у которых номер $n > 3$, будут удовлетворять неравенству: $|x_n - 5| < 0.1$; а все x_n, у которых номер $n > 6$, будут удовлетворять неравенству: $|x_n - 5| < 0.01$.

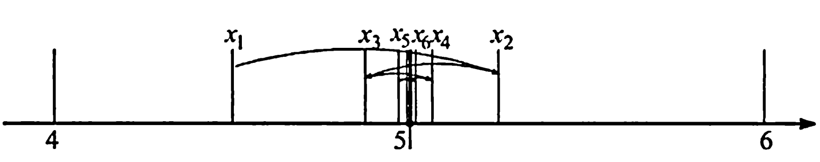


Рис. 2.3. К примеру 3

И вообще, если взять любое сколь угодно малое положительное число ε, то можно указать номер N такой, что все x_n, у которых номер $n > N$, будут удовлетворять неравенству $|x_n - 5| < \varepsilon$. (В качестве N следует взять наименьшее натуральное число, такое, чтобы при $n > N$ было: $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.)

Определение. Число a называется *конечным пределом* последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$, если для любого (и даже сколь угодно малого) положительного числа ε можно указать номер N такой, что все члены x_n последовательности, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству:

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2}$$

Неравенство (2), как мы знаем, равносильно двойному неравенству:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ (если } n > N\text{)},$$

или неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon (n > N). \tag{3}$$

Открытый промежуток $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ с центром в точке a называется ε-*окрестностью* точки a.

Неравенство (3) означает, что какой бы малой ни была ε-окрестность точки a, существует номер N такой, что все члены последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$, у которых номер $n > N$, попадут в эту окрестность.

Заметим, что чем меньше $\varepsilon > 0$, тем больше будет (вообще говоря) номер N, начиная с которого все x_n попадут в ε-окрестность точки a.

Если число a является пределом последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$, то говорят, что эта последовательность *сходится* (или *стремится*) к числу a, и записывают это так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ или } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

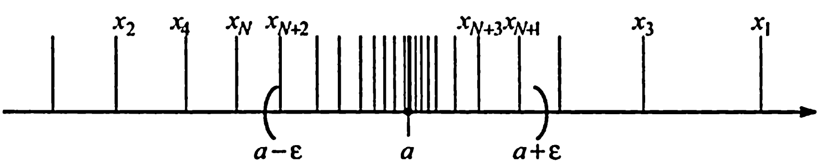


Рис. 2.4. К определению предела последовательности

Замечание 1. Из определения предела последовательности следует: если число a является пределом последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, то любая ε-окрестность точки a содержит бесконечное число членов последовательности, а вне этой окрестности может оказаться лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. (Вне ε-окрестности точки a могут оказаться все или только некоторые из элементов: $x_1, x_2, ..., x_N$).

Замечание 2. Если все члены последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ имеют одно и то же значение c (т. е. $x_n = c$ для любого $n \in \mathbf{N}$), то очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

§ 2. Бесконечно малые величины

Определение 1. Переменная α_n, пробегающая последовательность значений

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, ... \tag{1}$$

называется *бесконечно малой величиной*, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{2}$$

Можно дать и другое определение бесконечно малой величины, если исходить из определения предела последовательности для случая, когда число $a = 0$.

Определение 2. Переменная α_n, пробегающая последовательность значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, ...$, называется *бесконечно малой величиной*, если для любого (даже сколь угодно малого) положительного числа ε можно указать номер N такой, что все значения α_n, у которых номер $n > N$, по абсолютной величине будут меньше ε, т. е.

$$|\alpha_n| < \varepsilon, \text{ если } n > N. \tag{3}$$

Покажем, например, что если $|q| < 1$, то q^n — бесконечно малая величина. Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ — любое сколь угодно малое и рассмотрим неравенство:

$$|q^n| < \varepsilon. \tag{4}$$

Если $q = 0$, то неравенство (4) выполняется при всех n. Предположим теперь, что $q \neq 0$. Тогда неравенство (4) равносильно неравенству: $|q|^n < \varepsilon$, или неравенству: $n \lg |q| < \lg \varepsilon$ или неравенству $n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$ (у нас $|q| < 1 \Rightarrow \lg |q| < 0$). Если теперь в качестве номера N, считая $\varepsilon < 1$, взять наибольшее целое число, содержащееся в числе $\dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$, т. е. положить $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right)$,[1] то при $n > N$ окажется, что $\left|q^n\right| < \varepsilon$. А это означает, что q^n — бесконечно малая величина, если $|q| < 1$.

Замечание. Термин "бесконечно малая" в соответствии с высказанным определением прилагается к переменной величине, имеющей пределом 0. Поэтому нельзя именовать бесконечно малым никакое конкретное, фиксированное число, если оно не нуль. В частности, нельзя называть бесконечно малым и никакое отличное от нуля, отдельно взятое числовое значение переменной α_n, хотя бы эта переменная и была бесконечно малой.

Основные свойства бесконечно малых величин. Отметим, что когда говорят о сумме, разности, произведении, частном переменных x_n и y_n, которые пробегают последовательности значений

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots,$$

то имеют в виду переменные $x_n + y_n$, $x_n - y_n$, $x_n y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$, которые пробегают соответственно последовательности значений:

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n, \ldots,$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \ldots, x_n - y_n, \ldots,$$

$$x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \ldots, x_n y_n, \ldots,$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots.$$

[1] Через $\mathrm{E}(p)$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее p, или, короче, целая часть числа p; E есть начальная буква французского слова Entier, означающего "целый".

При определении частного $\frac{x_n}{y_n}$ нужно требовать, чтобы все элементы y_n последовательности $\{y_n\}_{n\in N}$ были отличны от нуля. Однако если у последовательности $\{y_n\}_{n\in N}$ в нуль обращаются лишь конечное число элементов, то $\frac{x_n}{y_n}$ можно определить с того номера, начиная с которого все элементы последовательности $\{y_n\}_{n\in N}$ отличны от нуля.

Свойство 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Докажем это свойство для суммы трех бесконечно малых величин. В том случае, когда бесконечно малых величин имеется m ($m = 2$ или $m > 3$, конечное), доказательство аналогичное.

Итак, дано: $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ — бесконечно малые величины при $n \to \infty$. Требуется доказать, что $(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)$ есть также бесконечно малая величина.

▶ Пусть $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, которое мы задаем произвольно. По условию, α_n — бесконечно малая величина. Следовательно, по числу $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ можно указать номер N_1 такой, что все значения α_n, у которых номер $n > N_1$, удовлетворяют неравенству

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как β_n и γ_n — бесконечно малые величины, то по тому же числу $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ можно указать номера N_2 и N_3 такие, что будет:

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ если } n > N_2,$$

и

$$|\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ если } n > N_3.$$

Возьмем теперь номер N, который равен наибольшему из номеров N_1, N_2, N_3, т. е. положим $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Тогда при $n > N$ будут выполняться одновременно все три неравенства

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{3};\ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{3};\ |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $|\alpha_n + \beta_n + \gamma_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| + |\gamma_n|$, то при $n > N$ будет

$$|\alpha_n + \beta_n + \gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

А это означает, что $(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)$ — бесконечно малая величина. ◀

Свойство 2. Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую величину α_n есть бесконечно малая величина.

▶ По условию, x_n — ограниченная переменная. Это значит, что существует постоянное число $M > 0$ такое, что при всех $n \in \mathrm{N}$ будет

$$|x_n| \le M.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое сколь угодно малое. Так как α_n — бесконечно малая величина, то по числу $\frac{\varepsilon}{M}$ обязательно найдется номер N такой, что при $n > N$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Так как $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n|$, то при $n > N$ будет

$$|x_n \cdot \alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

А это означает, что $x_n \cdot \alpha_n$ — бесконечно малая величина. ◀

Лемма. Если все члены последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ отличны от нуля и если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, где $a \ne 0$, то $\frac{1}{x_n}$ — ограниченная переменная.

▶ Так как $a \ne 0$, то $|a| > 0$. Возьмем в качестве ε число $\frac{|a|}{2}$ (т. е. положим $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$). По условию $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что при $n > N$ будет $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$. Имеем $a = x_n + (a - x_n) \Rightarrow |a| \le |x_n| + |a - x_n|$. Следовательно, при $n > N$

будет $|a| < |x_n| + \frac{|a|}{2} \Rightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2}$. Но тогда при $n > N$ будет $\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$, а значит, и $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{2}{|a|}$. Положим

$$M = \max\left\{\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \ldots, \frac{1}{|x_N|}, \frac{2}{|a|}\right\}.$$

А тогда уже при всех $n \in \mathrm{N}$ будет: $\left|\frac{1}{x_n}\right| \le M$. А это означает, что переменная $\frac{1}{x_n}$ — ограниченная.◀

Свойство 3. Пусть α_n — бесконечно малая величина при $n \to \infty$. Пусть все члены последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ отличны от нуля и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, где $a \ne 0$. Тогда $\frac{\alpha_n}{x_n}$ — бесконечно малая величина.

▶ По лемме переменная $\frac{1}{x_n}$ — ограниченная. Имеем $\frac{\alpha_n}{x_n} = \frac{1}{x_n} \cdot \alpha_n$, т. е. $\frac{\alpha_n}{x_n}$ представляет собой произведение ограниченной переменной на бесконечно малую величину. А тогда по свойству 2 заключаем, что $\frac{\alpha_n}{x_n}$ — бесконечно малая величина. ◀

§ 3. Бесконечно большие величины

Определение. Переменная x_n, пробегающая последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется *бесконечно большой* при $n \to \infty$, если для любого положительного числа M (каким бы большим мы его ни взяли) можно указать номер N такой, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n| > M. \tag{1}$$

Тот факт, что переменная x_n является бесконечно большой при $n \to \infty$, выражают еще словами “переменная x_n *стремится к беско-*

нечности", или "переменная x_n *имеет пределом бесконечность*", или символически:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty . \qquad (2)$$

Из неравенства (1) следует, что вместе с x_n бесконечно большими будут также переменные $-x_n$ и $|x_n|$.

Пример 1. Пусть $\{x_n\}_{n\in N} = \{n\}_{n\in N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. Видим, что какое бы мы число $M > 0$ ни взяли, переменная x_n при возрастании *n* обязательно "перерастет" *M*, т. е. для всех *n*, начиная с некоторого, будет: $|x_n| = n > M$. Значит, переменная $x_n = n$ есть бесконечно большая при $n \to \infty$, и мы можем написать

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty . \qquad (3)$$

Пример 2. Пусть $\{x_n\}_{n\in N} = \{-n\}_{n\in N} = \{-1, -2, -3, ..., -n, ...\}$. И в этом примере, какое бы число $M > 0$ ни взять, для всех *n*, начиная с некоторого, будет: $|x_n| = |-n| = n > M$. Значит, переменная $x_n = -n$ есть бесконечно большая при $n \to \infty$, и мы можем написать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-n) = \infty$.

Пример 3. Пусть $\{x_n\}_{n\in N} = \{(-1)^n \cdot n\}_{n\in N} = \{-1, 2, -3, 4, ...\}$. Имеем $|x_n| = |(-1)^n \cdot n| = n$. Следовательно, какое бы число $M > 0$ ни взять, для всех *n*, начиная с некоторого, будет $|x_n| = n > M$. Значит, переменная $x_n = (-1)^n \cdot n$ есть бесконечно большая при $n \to \infty$, и мы можем написать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \cdot n = \infty$.

Пример 4. Пусть $x_n = q^n$, где $|q| > 1$. Покажем, что эта переменная бесконечно большая при $n \to \infty$. Для этого возьмем число $M > 0$ — любое сколь угодно большое и рассмотрим неравенство $|q^n| > M$. Имеем

$$|q^n| > M \Leftrightarrow |q|^n > M \Leftrightarrow n \lg|q| > \lg M \Leftrightarrow n > \frac{\lg M}{\lg|q|}$$

(у нас $|q| > 1 \Rightarrow \lg|q| > 0$). Если теперь в качестве номера N взять

$N = \mathrm{E}\left(\dfrac{\lg M}{\lg|q|}\right)$, то при $n > N$ окажется, что $|q^n| > M$. А это означает,

что $x_n = q^n$ — бесконечно большая величина.

Замечание 1. Если переменная x_n — бесконечно большая при $n \to \infty$, то точка, изображающая x_n на числовой оси, по мере возрастания n неограниченно удаляется от начала отсчета (т. е. от точки 0). Так, в примере 1 эта точка неограниченно удаляется вправо, в примере 2 — влево, в примере 3 — неограниченно удаляется от начала отсчета, оказываясь попеременно то слева, то справа от него.

Замечание 2. При рассмотрении бесконечно больших величин бывает полезным иногда выделять случаи, когда переменная x_n, начиная с некоторого номера N_*, сохраняет знак "+" или "−":

1) Если переменная x_n — бесконечно большая величина при $n \to \infty$ и при $n > N_*$ все значения x_n имеют знак "+", то пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty .$$

Это соответствует случаю, когда точка, изображающая x_n на числовой оси, по мере возрастания n неограниченно удаляется вправо от начала отсчета.

2) Если переменная x_n — бесконечно большая величина при $n \to \infty$ и при $n > N_*$ все значения x_n имеют знак "−", то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty .$$

Это соответствует случаю, когда точка, изображающая x_n на числовой оси, по мере возрастания n неограниченно удаляется влево от начала отсчета.

Замечание 3. Очевидно, что любая бесконечно большая переменная x_n является неограниченной, поскольку для любого числа $M > 0$ (каким бы большим мы его ни взяли) можно указать номер N такой, что при $n > N$ все значения x_n удовлетворяют неравенству $|x_n| > M$, а, следовательно, для любого $M > 0$ найдется по крайней мере один элемент x_n такой, что будет $|x_n| > M$. Однако неограниченная переменная может и не быть бесконечно большой. Например, неограниченная последовательность

$$1, 2, 1, 3, 1, 4, \ldots, 1, n, 1, n+1, \ldots$$

не является бесконечно большой, поскольку, если в качестве числа $M > 0$ взять число, большее, чем 1, то неравенство $|x_n| > M$ не выполняется для всех x_n с нечетными номерами.

Основные свойства бесконечно больших величин.

Свойство 1. Пусть x_n — бесконечно большая величина при $n \to \infty$. Пусть переменная y_n имеет предел, отличный от нуля. Тогда $x_n \cdot y_n$ есть бесконечно большая величина.

▶ 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, где $b \neq 0$ и b — конечное число. Так как $b \neq 0$, то $|b| > 0$. Возьмем в качестве $\varepsilon > 0$ число $\frac{|b|}{2}$ (т. е. положим $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$). По условию $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Следовательно, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_1 такой, что при $n > N_1$ будет $|y_n - b| < \varepsilon$, т. е. $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$, если $n > N_1$. Имеем $b = y_n + (b - y_n) \Rightarrow |b| \leq |y_n| + |b - y_n|$ $\Rightarrow |b| < |y_n| + \frac{|b|}{2}$, если $n > N_1$. Следовательно, $|y_n| > \frac{|b|}{2}$, если $n > N_1$. Возьмем число $M > 0$ — любое как угодно большое. По условию переменная x_n — бесконечно большая при $n \to \infty$. Следовательно, по числу $\frac{2M}{|b|} > 0$ можно указать номер N_2 такой, что при $n > N_2$ будет $|x_n| > \frac{2M}{|b|}$.

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будут выполняться одновременно неравенства: $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ и $|x_n| > \frac{2M}{|b|}$. Поэтому при $n > N$ будет

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| > \frac{2M}{|b|} \cdot \frac{|b|}{2} = M,$$

т. е. $|x_n \cdot y_n| > M$, если $n > N$. А это означает, что переменная $x_n \cdot y_n$ — бесконечно большая при $n \to \infty$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Это означает, что для любого числа $L > 0$ (сколь угодно большого) можно указать номер N_1 такой, что при $n > N_1$ будет $|y_n| > L$. Возьмем число $M > 0$ — любое как угодно большое. Так как переменная x_n — бесконечно большая при $n \to \infty$, то по числу $\frac{M}{L} > 0$ можно указать номер N_2 такой, что при $n > N_2$ будет $|x_n| > \frac{M}{L}$.

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будут выполняться оба неравенства $|y_n| > L$ и $|x_n| > \frac{M}{L}$. Следовательно, при $n > N$ будем иметь

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| > \frac{M}{L} \cdot L = M ,$$

т. е. $|x_n \cdot y_n| > M$, если $n > N$. Последнее означает, что переменная $x_n \cdot y_n$ — бесконечно большая при $n \to \infty$. ◀

Следующие два свойства устанавливают связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

Свойство 2. Если все значения переменной x_n отличны от 0 и если переменная x_n — бесконечно большая при $n \to \infty$, то переменная $\frac{1}{x_n}$ — бесконечно малая при $n \to \infty$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое сколь угодно малое. По условию x_n — бесконечно большая величина при $n \to \infty$. Следовательно, любому сколь угодно большому числу $M > 0$ (в частности, числу $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$) отвечает номер N такой, что при $n > N$ будет

$$|x_n| > M \text{, т. е. } |x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \text{, если } n > N .$$

Но тогда при $n > N$ будет $\frac{1}{|x_n|} < \varepsilon$, а значит $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, если $n > N$.

Последнее означает, что переменная $\frac{1}{x_n}$ — бесконечно малая величина при $n \to \infty$. ◀

Свойство 3. Если все значения переменной α_n отличны от нуля и если переменная α_n — бесконечно малая величина при $n \to \infty$, то переменная $\frac{1}{\alpha_n}$ — бесконечно большая при $n \to \infty$.

▶ Возьмем произвольное сколь угодно большое число $M > 0$. По условию α_n — бесконечно малая величина. Следовательно, любому сколь угодно малому числу $\varepsilon > 0$ (в частности, числу $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$) отвечает номер N такой, что при $n > N$ будет

$$|\alpha_n| < \varepsilon, \text{ т. е. } |\alpha_n| < \frac{1}{M}, \text{ если } n > N.$$

Но тогда при $n > N$ будет $\frac{1}{|\alpha_n|} > M$, а значит $\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > M$, если $n > N$. Последнее означает, что переменная $\frac{1}{\alpha_n}$ — бесконечно большая величина при $n \to \infty$. ◀

§ 4. Основные теоремы о пределах

Лемма. Пусть имеются две переменные x_n и y_n. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, где a и b — конечные числа. Тогда, если $b > a$, то существует номер N такой, что при всех $n > N$ будет: $y_n > x_n$.

▶ Возьмем число $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Так как $b > a$, то $\varepsilon > 0$. По условию $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_1 такой, что при всех $n > N_1$ будет: $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. В частности, при всех $n > N_1$ будет:

$$x_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Таким образом, $x_n < \frac{a+b}{2}$, если $n > N_1$.

По условию $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_2 такой, что при всех $n > N_2$ будет: $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. В частности, при всех $n > N_2$ будет:

$$y_n > b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Итак, $y_n > \frac{a+b}{2}$, если $n > N_2$.

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будут выполняться оба неравенства: $x_n < \frac{a+b}{2}$, $y_n > \frac{a+b}{2}$. Следовательно, $x_n < y_n$, если $n > N$. ◀

Эта лемма означает следующее. Если две переменные стремятся к разным пределам, то та из них, которая стремится к большему пределу, окончательно становится больше другой.

Теорема 1 (о единственности предела). Переменная x_n может иметь только один конечный предел. (Точнее: переменная x_n может не иметь предела, но если переменная x_n имеет предел, то он единствен).

▶ Допустим, что утверждение теоремы несправедливо. Это означает, что у переменной x_n имеются, по крайней мере, два различных конечных предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, где $a \neq b$, например, $a < b$. Но тогда по лемме найдется номер N такой, что при $n > N$ будет: $x_n < x_n$, а это абсурд. Значит, теорема доказана. ◀

Теорема 2 (о предельном переходе в неравенстве). Пусть имеются две переменные x_n и y_n, и пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ (a и b — конечные числа). Если, начиная с некоторого места, т. е. для всех $n > N_*$, оказывается $x_n \leq y_n$, то можно утверждать, что $a \leq b$ (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$).

▶ Если бы соотношение $a \leq b$ не выполнялось, то было бы $a > b$. Но тогда по лемме обязательно нашелся бы номер N (можно считать $N > N_*$) такой, что для всех $n > N$ было бы $x_n > y_n$, что невозможно, так как для всех $n > N_*$ $y_n \geq x_n$. Значит, теорема доказана. ◀

Замечание. Из строгого неравенства $x_n < y_n$ (для $n > N_*$) между переменными не следует строгое же неравенство между пределами этих переменных, а следует только неравенство $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Например, пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{5 - \frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$; $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{5 + \frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$. Ясно, что для всех $n \in \mathbf{N}$: $x_n < y_n$. Однако

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(5 - \frac{1}{n}\right) = 5 \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(5 + \frac{1}{n}\right) = 5,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 3 (о сжатой переменной). Пусть имеются три переменные x_n, y_n, z_n и пусть, начиная с некоторого места, т. е. для всех $n > N_*$ ($N_* \in \mathbf{N}$), оказывается

$$x_n \le y_n \le z_n.$$

Тогда, если переменные x_n и z_n стремятся к одному и тому же конечному пределу a, то к этому же пределу a стремится и переменная y_n.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое сколь угодно малое. По условию, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_1 такой, что для всех $n > N_1$ будет $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$; в частности, $a - \varepsilon < x_n$, если $n > N_1$. По условию, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N_2 такой, что для всех $n > N_2$ будет $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$, в частности, $z_n < a + \varepsilon$, если $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_*, N_1, N_2\}$. Тогда для всех $n > N$ окажется

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon.$$

Следовательно, при $n > N$ будет: $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. А это означает, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. ◀

Теорема 4 (об ограниченности переменной, имеющей конечный предел). Если переменная x_n имеет конечный предел, то она ограниченная.

▶ Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, где a — конечное число. Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое сколь угодно малое. Так как $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что для всех $n > N$ будет $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Вне промежутка $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ могут находиться лишь $x_1, x_2, ..., x_N$ (или только некоторые из этих значений переменной x_n; во всяком случае их будет конечное число, меньшее или равное N).

Положим

$$m = \min\{x_1, x_2, ..., x_N, a-\varepsilon\},$$
$$M = \max\{x_1, x_2, ..., x_N, a+\varepsilon\}.$$

Тогда для всех $n \in \mathbf{N}$ будем иметь: $m \le x_n \le M$. А это означает, что переменная x_n — ограниченная. ◀

Определение. Пусть

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... \quad (1)$$

есть некоторая числовая последовательность. Рассмотрим произвольную, возрастающую последовательность целых положительных чисел

$$n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...$$

Выберем из последовательности (1) элементы с номерами $n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...$ и расположим их в том же порядке, как и числа n_k ($k = 1, 2, ...$):

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_k}, ... \quad (2)$$

Полученную числовую последовательность (2) будем называть подпоследовательностью последовательности (1).

Теорема 5. Если последовательность (1) сходится и имеет своим пределом число a, то и любая подпоследовательность (2), выделенная из последовательности (1), сходится и имеет своим пределом то же самое число a.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое сколь угодно малое. По условию $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (3)$$

Выберем теперь номер K такой, чтобы было $n_K > N$. Тогда при $k > K$ будет $n_k > n_K$ (у нас числа $n_1, n_2, n_3, ...$ возрастают). Следовательно, при $k > K$ будет $n_k > N$. Но тогда из неравенства (3) следует, что при $k > K$ будем иметь

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Последнее означает, что $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. ◀

§ 5. Свойства конечных пределов, связанные с арифметическими действиями над переменными

Лемма 1. Переменная x_n, имеющая конечный предел a, отличается от своего предела на бесконечно малую величину.

▶ Дано: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, где a — конечное число. Требуется доказать, что $\alpha_n = x_n - a$ есть бесконечно малая величина. Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое.

По условию $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что для всех $n > N$ будет

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Но $|x_n - a| = |\alpha_n|$. Поэтому для всех $n > N$ будет

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

А это означает, что α_n — бесконечно малая величина. ◀

Лемма 2. Если разность между переменной x_n и некоторым постоянным числом a есть величина бесконечно малая, то число a есть предел переменной x_n.

▶ Дано: $x_n - a = \alpha_n$ — бесконечно малая величина. Требуется доказать, что $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое.

По условию α_n — бесконечно малая величина. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что при всех $n > N$ будет

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

Но $|\alpha_n| = |x_n - a|$. Поэтому и $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N$. А это означает, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ◀

Теорема 1. Пусть имеются две переменные x_n и y_n, и пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, где a и b — конечные числа. Тогда переменная $(x_n \pm y_n)$ также имеет конечный предел, причем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b.$$

▶ Так как переменная, имеющая конечный предел, отличается от него на величину бесконечно малую, то можем написать

$$\begin{matrix} x_n - a = \alpha_n \\ y_n - b = \beta_n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_n = a + \alpha_n \\ y_n = b + \beta_n, \end{matrix}$$

где α_n и β_n — бесконечно малые величины. Имеем

$$x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_n \pm y_n) - (a \pm b) = (\alpha_n \pm \beta_n).$$

По свойству бесконечно малых величин $(\alpha_n \pm \beta_n)$ есть величина бесконечно малая. Видим, что переменная $(x_n \pm y_n)$ отличается от постоянного числа $(a \pm b)$ на бесконечно малую величину. А тогда по лемме 2 заключаем, что $(a \pm b) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)$. Теорема доказана. ◀

Теорема 2. Пусть имеются две переменные x_n и y_n и пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ где a и b — конечные числа. Тогда переменная $x_n \cdot y_n$ также имеет конечный предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$.

▶ По условию $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (a и b — конечные числа). Следовательно, как и при доказательстве теоремы 1, можем написать

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n — бесконечно малые величины. Имеем

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_n y_n - ab = (\alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n).$$

По свойству бесконечно малых величин $(\alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n)$ есть величина бесконечно малая. Видим, что переменная $x_n \cdot y_n$ отличается от постоянного числа $a \cdot b$ на величину бесконечно малую. А тогда по лемме 2 заключаем, что $ab = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$. Теорема доказана. ◀

Теорема 3. Пусть имеются две переменные x_n и y_n. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, где a — конечное число. Пусть все значения переменной y_n отличны от нуля и $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, где b — конечное число, отличное от нуля. Тогда переменная $\frac{x_n}{y_n}$ также имеет конечный предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b}$.

▶ По условию $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ (a и b — конечные числа). Поэтому можем написать

$$x_n=a+\alpha_n, y_n=b+\beta_n,$$

где α_n и β_n — бесконечно малые величины. Имеем

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}=\frac{b\alpha_n-a\beta_n}{b(b+\beta_n)}. \qquad (1)$$

По свойству бесконечно малых величин числитель правой части соотношения (1) есть бесконечно малая величина. Замечаем, далее, что значения знаменателя правой части (1) при всех n отличны от нуля и $b(b+\beta_n)=b^2+b\beta_n\underset{n\to\infty}{\to}b^2\neq 0$. Значит, $\frac{b\alpha_n-a\beta_n}{b(b+\beta_n)}$ — бесконечно малая величина.

Видим из (1), что переменная $\frac{x_n}{y_n}$ отличается от постоянного числа $\frac{a}{b}$ на бесконечно малую величину. А тогда по лемме 2 заключаем, что $\frac{a}{b}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$. Теорема доказана. ◀

§ 6. Неопределенные выражения

В предыдущем параграфе (§ 5) мы рассматривали выражения

$$x_n\pm y_n,\quad x_ny_n,\quad \frac{x_n}{y_n}, \qquad (1)$$

и, в предположении, что переменные x_n и y_n имеют конечные пределы (и в случае частного еще и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$) выразили пределы каждого из выражений (1) через пределы переменных x_n и y_n.

Были оставлены без рассмотрения случаи, когда пределы переменных x_n и y_n (один или оба сразу) бесконечны и, если речь идет о частном, когда предел знаменателя равен 0. Из этих случаев мы остановимся здесь лишь на четырех, представляющих некоторую важную и интересную особенность.

1. Рассмотрим сначала частное $\frac{x_n}{y_n}$ и предположим, что обе переменные x_n и y_n одновременно стремятся к нулю. Здесь мы сталкиваемся с особым обстоятельством: хотя нам известны пределы переменных x_n и y_n, но о пределе их отношения, не зная конкретных законов изменения этих переменных, никакого утверждения сделать нельзя. Предел отношения $\frac{x_n}{y_n}$, в зависимости от конкретных законов изменения переменных x_n и y_n, может иметь различные значения или даже не существовать. Поясним это на примерах.

1) Пусть $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$. Ясно, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Имеем $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

2) Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Имеем $\frac{x_n}{y_n} = n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

3) Пусть $x_n = \frac{5}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Имеем $\frac{x_n}{y_n} = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 5$.

4) Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Имеем $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует.

В случае, когда $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, говорят, что выражение $\frac{x_n}{y_n}$ представляет *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$.

2. Рассмотрим отношение $\frac{x_n}{y_n}$ и предположим, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. И здесь, не зная конкретных законов изменения переменных x_n и y_n, нельзя сделать никакого утверждения относительно предела их отношения. В самом деле:

1) Пусть $x_n = n$, $y_n = n^2$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Имеем $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

2) Пусть $x_n = n^2$, $y_n = n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Имеем $\frac{x_n}{y_n} = n \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$.

3) Пусть $x_n = 4n$, $y_n = n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Имеем: $\frac{x_n}{y_n} = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 4$.

4) Пусть $x_n = \left(3 + (-1)^n\right) \cdot n$, $y_n = n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Имеем $\frac{x_n}{y_n} = 3 + (-1)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + (-1)^n\right)$ не существует. В случае, когда $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, говорят, что выражение $\frac{x_n}{y_n}$ представляет *неопределенность вида* $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Рассмотрим произведение $x_n y_n$ и предположим, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Как и в пунктах **1** и **2**, мы сталкиваемся здесь с той же особенностью. Хотя нам известны пределы переменных x_n и y_n, но о пределе их произведения, не зная конкретных законов изменения этих переменных, нельзя сделать никакого утверждения. Об этом свидетельствуют примеры.

1) Пусть $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Имеем $x_n y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$.

2) Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Имеем $x_n y_n = n \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty$.

3) Пусть $x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Имеем $x_n y_n = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 2$.

4) Пусть $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. Имеем $x_n y_n =$
$= (-1)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

В случае, когда $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, говорят, что выражение $x_n y_n$ представляет *неопределенность вида* $0 \cdot \infty$.

4. Рассмотрим сумму $x_n + y_n$. Здесь особым оказывается случай, когда переменные x_n и y_n стремятся к бесконечности разных знаков. Именно в этом случае о пределе суммы $(x_n + y_n)$ ничего определенного сказать нельзя, не зная самих переменных x_n и y_n. Поясним это на примерах.

1) Пусть $x_n = 5n$, $y_n = -4n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$. Имеем
$x_n + y_n = 5n - 4n = n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

2) Пусть $x_n = 4n$, $y_n = -5n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$. Имеем
$x_n + y_n = -n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.

3) Пусть $x_n = n + 5$, $y_n = -n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$. Имеем
$x_n + y_n = 5 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 5$.

4) Пусть $x_n = n + (-1)^n$, $y_n = -n$; $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$. Имеем
$x_n + y_n = (-1)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

В случае, когда $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, говорят, что выражение $(x_n + y_n)$ представляет неопределенность вида $\infty - \infty$.

Итак, поставив задачу: найти пределы арифметических выражений $(x_n \pm y_n)$, $x_n y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ по пределам переменных x_n и y_n, мы нашли четыре случая, когда этого сделать нельзя. В этих случаях приходится, учитывая законы изменения переменных x_n и y_n, непосредственно исследовать интересующее нас выражение. Такое исследование получило название *раскрытие неопределенностей*. Следует отметить, что раскрытие неопределенностей не всегда бывает таким простым, как в приведенных выше схематических примерах.

Примеры на нахождение пределов

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

▶ Мы имеем здесь неопределенность вида: $\infty - \infty$. Преобразуем разность $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, умножая и деля ее на сумму корней $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$. Получим

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ (величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой величиной). ◀

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

▶ В примере 1 было показано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$. Следовательно, мы имеем в примере 2 неопределенность вида: $\infty\cdot 0$. Умножая и деля заданное выражение на сумму $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$, получим $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Здесь мы уже пришли к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Делим числитель и знаменатель полученного выражения на $\sqrt{n}$. Получим $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$. Очевидно,

$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\substack{\to 1\\ n\to\infty}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$. А тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)=2$ и,

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}$. ◀

Пример 3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, где $|a|<1$ и $|b|<1$.

▶ Так как $1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $1+b+b^2+\ldots+b^n=$ $=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=$$

$$=\frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a},$$

ибо $\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b^{n+1}=0$ (было показано ранее, что если $|q|<1$, то q^n — бесконечно малая величина). ◀

Пример 4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

▶ Установим сначала, что

$$1^2+2^2+\ldots+(k-1)^2+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \qquad (*)$$

где k — любое, $k\in\mathbf{N}$.

При $k=1$ имеем: $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, т. е. $1=1$; равенство (*) верно.

Допустим, что равенство (*) верно при $k=m$ ($m\in\mathbf{N}$, $m>1$), т. е.

$$1^2+2^2+\ldots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Но тогда

$$1^2+2^2+\ldots+m^2+(m+1)^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\,[2(m+1)+1]}{6}.$$

Видим, что переход от m к $m+1$ сделан. Значит, равенство (*) верно для любого $k\in\mathbf{N}$. В частности, при $k=n-1$ будет

$$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}.$$

А тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$ ◀

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

▶ Обозначим

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{2n-5}{2^{n-1}}+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

А тогда

$$s_n-\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{2n-1}{2^n} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 2 - \frac{1}{2^{n-2}} - 2\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$. Покажем, что и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$. В самом деле, имеем

$$\frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots + 1} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1}.$$

Из того, что $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n-1} = 0$ заключаем: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$. А тогда

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}} - 2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 3. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}\right]$.

▶ Обозначим выражение, стоящее в квадратных скобках через s_n. Имеем

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

А тогда $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1$. ◀

§ 7. Теорема Штольца и ее применения

Для определения пределов неопределенных выражений $\frac{x_n}{y_n}$ типа $\frac{\infty}{\infty}$ часто бывает полезной теорема Штольца.

Теорема. Пусть имеются две переменные x_n и y_n. Пусть $y_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, причем y_n — возрастающая, хотя бы начиная с некоторого места, т. е. $y_{n+1} > y_n$ при $n > N_*$. Тогда, если существует конечный или бесконечный

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \tag{1}$$

то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

▶ 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$, где l — конечное число. Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Так как $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что для всех $n > N$ будет

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ или } l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{2},$$

если $n > N$ (можно считать, что $N > N_*$) У нас, по условию, для всех $n > N$ $(> N_*)$: $y_n - y_{n-1} > 0$. Поэтому можно написать

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n-1})$$

для любого n, удовлетворяющего условию: $n > N$. Следовательно, в частности,

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+1} - y_N) < x_{N+1} - x_N < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+1} - y_N),$$

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

....

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n-1}-y_{n-2})<x_{n-1}-x_{n-2}<\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n-1}-y_{n-2}),$$

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n}-y_{n-1})<x_{n}-x_{n-1}<\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n}-y_{n-1}).$$

Сложив соответствующие части этих неравенств, получаем

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n}-y_{N})<x_{n}-x_{N}<\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n}-y_{N}),$$

для любого $n>N$. Значит,

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}<l+\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

если $n>N$. Напишем теперь тождество (которое легко проверить непосредственно)

$$\frac{x_n}{y_n}-l=\frac{x_N-ly_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right). \tag{2}$$

Из (2) находим

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|\le\left|\frac{x_N-ly_N}{y_n}\right|+\left|1-\frac{y_N}{y_n}\right|\cdot\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right|.$$

Так как $0<\frac{y_N}{y_n}<1$ при $n>N$, то $\left|1-\frac{y_N}{y_n}\right|<1$. Следовательно,

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\left|\frac{x_N-ly_N}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right|,\ \text{если } n>N. \tag{3}$$

По условию $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Значит, $\frac{x_N-ly_N}{y_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Значит, взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер N_1 такой, что для всех $n>N_1$ будет $\left|\frac{x_N-ly_N}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Ранее было получено: для всех $n > N$ $\left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\tilde{N} = \max\{N, N_1\}$. Тогда из (3) следует, что для всех $n > \tilde{N}$ $\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| < \varepsilon$. А это означает, что

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

II. Случай, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \infty$, приводится к рассмотренному случаю I. Пусть, например,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty. \tag{4}$$

Из этого следует, прежде всего, что, начиная с некоторого места, т. е. при $n > N_{**}$ будет $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}$. Следовательно, вместе с y_n и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, причем переменная x_n возрастает с возрастанием n. В таком случае, доказанную теорему можно применить к обратному отношению $\frac{y_n}{x_n}$. Из (4) находим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$ (предел существует и конечен). А тогда по доказанному в пункте I существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$, а это и требовалось доказать. ◀

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, где $p \in \mathbb{N}$.

▶ Положим $x_n = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $y_n = n^{p+1}$. Имеем:

$$x_n - x_{n-1} = (1^p + 2^p + \ldots + n^p) - \\ -\left(1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p\right) = n^p,$$

$$y_n - y_{n-1} = n^{p+1} - (n-1)^{p+1} =$$

$$= n^{p+1} - \left[n^{p+1} - (p+1)n^p + \frac{(p+1)p}{2} n^{p-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{(p+1)p(p-1)}{3!} n^{p-2} + \ldots + (-1)^{p+1} \right] =$$

$$= (p+1)n^p - \frac{(p+1)p}{2} n^{p-1} + \ldots + (-1)^p =$$

$$= n^p \left[(p+1) - \frac{(p+1)p}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!} \cdot \frac{1}{n^2} - \ldots + \frac{(-1)^p}{n^p} \right].$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[(p+1) - \frac{(p+1)p}{2} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + (-1)^p \frac{1}{n^p} \right]} = \frac{1}{p+1}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n\in N}$ имеет предел (конечный или бесконечный). Пусть $\{b_n\}_{n\in N} = \left\{ \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \right\}_{n\in N}$ (b_n есть "среднее арифметическое" первых n значений переменной a_n. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\blacktriangleright$ Положим $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $y_n = n$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})}{n - (n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = \lim_{n\to\infty} a_n. \blacktriangleleft$$

§ 8. Монотонные последовательности. Признак существования предела монотонных последовательностей

Определение. Пусть имеется переменная x_n, пробегающая последовательность значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots . \qquad (1)$$

I. Если при всех $n \in \mathrm{N}$ оказывается, что $x_n < x_{n+1}$, то переменная x_n называется *строго возрастающей*. Переменную x_n называют *неубывающей* или *возрастающей в широком смысле*, если для всех $n \in \mathrm{N}$ оказывается $x_n \le x_{n+1}$.

II. Если при всех $n \in \mathrm{N}$ оказывается, что $x_n > x_{n+1}$, то переменная x_n называется *строго убывающей*. Переменную x_n называют *невозрастающей* или *убывающей в широком смысле*, если для всех $n \in \mathrm{N}$ оказывается $x_n \ge x_{n+1}$.

Переменные всех типов, перечисленных выше, изменяются в одном направлении. Они объединяются под общим названием *монотонных*. По отношению к монотонным переменным имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. 1. Если переменная x_n — неубывающая (в частности, строго возрастающая) и ограничена сверху, то она имеет конечный предел.

2. Если переменная x_n — неубывающая (в частности, строго возрастающая) и сверху не ограничена, то $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

▶ 1. По условию числовое множество $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ ограничено сверху. Но тогда, как мы знаем, существует точная верхняя граница множества $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$. Пусть $a = \sup\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$. Ясно, что при всех $n \in \mathrm{N}$ будет:

$$x_n \le a. \qquad (2)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое и рассмотрим число $a-\varepsilon$. Так как $a-\varepsilon < a$, то по свойству супремума на множестве $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ обязательно найдется элемент x_N такой, что будет: $x_N > a-\varepsilon$. Так как переменная x_n — неубывающая, то при $n > N$ будет $x_n \ge x_N$, а, следовательно, при $n > N$ будет

$$x_n > a-\varepsilon. \qquad (3)$$

Заметим, что при $n > N$ будут выполняться одновременно оба неравенства (2) и (3), т. е. при $n > N$ будет $a - \varepsilon < x_n \le a$, а значит, и $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. А это означает, что $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

2. По условию, числовое множество $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ сверху не ограничено. Это означает, что какое бы большое число $M > 0$ ни взять, на множестве $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ обязательно найдется хотя бы один элемент x_N такой, что будет $x_N > M$. Так как переменная x_n — неубывающая, то при $n > N$ будет $x_n \ge x_N$, а, следовательно, при $n > N$ будет $x_n > M$. А это означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$. ◀

Теорема 2. 1. Если переменная x_n — невозрастающая (в частности, строго убывающая) и ограничена снизу, то она имеет конечный предел.

2. Если переменная x_n — невозрастающая (в частности, строго убывающая) и снизу не ограничена, то $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$.

▶ 1. По условию числовое множество $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ ограничено снизу. Но тогда, как мы знаем, существует точная нижняя граница множества $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$. Пусть $b = \inf\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$. Ясно, что при всех $n \in \mathrm{N}$ будет:

$$x_n \ge b. \tag{4}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое и рассмотрим число $b + \varepsilon$. Так как $b + \varepsilon > b$, то по свойству инфимума на множестве $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ обязательно найдется элемент x_N такой, что будет $x_N < b + \varepsilon$. Так как переменная x_n — невозрастающая, то при $n > N$ будет $x_n \le x_N$, а, следовательно, при $n > N$ будет

$$x_n < b + \varepsilon. \tag{5}$$

Заметим, что при $n > N$ будут выполняться одновременно оба неравенства (4) и (5), т. е. при $n > N$ будет

$$b \le x_n < b + \varepsilon, \text{ а значит, и } b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon.$$

А это означает, что $b = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

2. По условию числовое множество $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ снизу не ограничено. Это означает, что какое бы большое число $M > 0$ ни взять, на

множестве $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ обязательно найдется хотя бы один элемент x_N такой, что будет $x_N < -M$. Так как переменная x_n — невозрастающая, то при $n > N$ будет $x_n \le x_N$, а, следовательно, при $n > N$ будет: $x_n < -M$. А это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. ◀

Замечание. Все утверждения теорем 1 и 2 остаются в силе и для переменной, которая становится монотонной, лишь начиная с некоторого места, т. е. при $n \ge N_*$, $N_* \in \mathbf{N}$ (ибо — без влияния на предел переменной — любое число первых ее значений можно отбросить).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$.

▶ Если $0 < a < 1$, то a^n — бесконечно малая величина. Поэтому ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$. Ясно также, что при $a = 1$ будем иметь $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$. Пусть теперь $a > 1$. В этом случае отношение $\dfrac{a^n}{n!}$ представляет неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Обозначим $\dfrac{a^n}{n!} = x_n$. Имеем

$$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{a}{n+1} = x_n \cdot \frac{a}{n+1}.$$

Заметим, что как только $n + 1 > a$ (т. е. как только $n > a - 1$), так переменная x_n становится строго убывающей. Отметим, далее, что переменная x_n ограничена снизу (например, числом 0). Следовательно, по теореме 2 переменная x_n имеет конечный предел. Обозначим этот предел через c.

Для того, чтобы найти его, перейдем к пределу в равенстве

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{a}{n+1}.$$

Так как x_{n+1} пробегает ту же последовательность значений, что и x_n (с точностью до первого члена), то x_{n+1} имеет тот же предел c. Будем иметь, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} \Leftrightarrow c = c \cdot 0 \Rightarrow c = 0.$$

Таким образом, и в случае, когда $a > 1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Пусть переменная x_n задана следующим образом:

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots,$$

$$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}, \ldots .$$

Требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$\blacktriangleright$ Замечаем, что $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+x_1}$, $x_3 = \sqrt{2+x_2}$, ..., $x_{n+1} =$ $= \sqrt{2+x_n}$. Ясно, что переменная x_n строго возрастающая, ибо

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots .$$

В самом деле, имеем $x_1 = \sqrt{2}(>0)$; $x_2 = \sqrt{2+x_1} > \sqrt{2}$, т. е. $x_2 > x_1$; $x_3 = \sqrt{2+x_2} > \sqrt{2+x_1}$, т. е. $x_3 > x_2$, $\cdots$. Имеем $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$. Допустим, что $x_n > x_{n-1}$ Но тогда $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > \sqrt{2+x_{n-1}}$, т. е. $x_{n+1} > x_n$. Видим, что переход от n к $n+1$ сделан. Значит, неравенство $x_n < x_{n+1}$ верно для любого $n \in \mathbf{N}$. Имеем, далее, $x_1 = \sqrt{2} < 2$; $x_2 = \sqrt{2+x_1} < \sqrt{2+2} = 2$; $x_3 = \sqrt{2+x_2} < \sqrt{2+2} = 2$; ... . Допустим, $x_n < 2$, а тогда $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$. Видим, что переход от n к $n+1$ сделан. Значит, неравенство $x_n < 2$ верно для любого $n \in \mathbf{N}$. Таким образом, показано, что переменная x_n возрастающая и ограничена сверху. Следовательно, по теореме 1 переменная x_n имеет конечный предел. Обозначим этот предел через c. Для того, чтобы найти его, перейдем к пределу в равенстве $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ (у нас $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$). Получим, таким образом, что c удовлетворяет квадратному уравнению: $c^2 = 2 + c$. Уравнение это имеет корни разных знаков, но интересующий нас предел не может быть отрицательным, следовательно, равен именно положительному корню:

$$c = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = 2.$$

§ 9. Число *e*. Натуральные логарифмы, их связь с десятичными

Определение. *Числом e* называется предел переменной

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{1}$$

при n натуральном, стремящемся к бесконечности.

Чтобы оправдать это определение, надо установить, что у переменной $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ существует конечный предел при $n \to \infty$. Мы установим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, конечный, если покажем, что переменная x_n — возрастающая и ограниченная сверху.

▶ 1. Покажем, что переменная x_n — возрастающая.

Применяя формулу бинома Ньютона, n член последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ можно написать в виде

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n},$$

или

$$\begin{aligned} x_n = 2 &+ \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \\ &+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично для $(n+1)$-го члена последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ находим

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+ \qquad (3)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Заметим, что правая часть соотношения (2) имеет n слагаемых, а правая часть (3) имеет $(n+1)$ слагаемых.

Сравнивая x_n и x_{n+1}, видим, что первые слагаемые в правых частях соотношений (2) и (3) одинаковы, второе, третье, , n-е слагаемое у x_{n+1} больше, чем у x_n, ибо

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right);\ \left(1-\frac{2}{n}\right)<\left(1-\frac{2}{n+1}\right);\dots;$$
$$\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right).$$

Кроме того, в составе x_{n+1} имеется еще $(n+1)$-е слагаемое, которого в составе x_n нет и которое является числом положительным. Значит, $x_n < x_{n+1}$, для любого $n \in \mathbf{N}$, и, следовательно, переменная x_n — возрастающая.

2. Покажем теперь, что переменная x_n ограничена сверху. Для этого снова воспользуемся формулой (2). Заменим все разности, стоящие в скобках в правой части этой формулы, на единицы, отчего правая часть увеличится (ведь каждая такая разность меньше единицы). Получим

$$x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}+\dots+\frac{1}{n!}.$$

Но

$$2! = 2;\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3 > 2\cdot 2 = 2^2;\ \dots;\ k! > 2^{k-1};\ \dots;\ n! > 2^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2};\ \dots;\ \frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}};\ \dots;\ \frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поэтому и подавно

$$x_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Так как

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\ldots=1,$$

то получаем $x_n < 3$, для любого $n \in \mathrm{N}$, т. е. переменная x_n ограничена сверху. (Из формулы (2) видно, что $x_n \geq 2$ и, следовательно, $2 \leq x_n < 3$ при всех $n \in \mathrm{N}$.)

Итак, показано, что переменная x_n монотонно возрастает и ограничена сверху. Поэтому существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, величина которого заключена между 2 и 3. Этот предел обозначается буквой e. ◀

Число e играет большую роль в математическом анализе и его приложениях. Доказано, что e — число иррациональное. Имеются приемы, позволяющие вычислить любое число знаков в его представлении бесконечной десятичной дробью. При этом установлено, что

$$e = 2{,}718281828459045\ldots .$$

Рассмотрим теперь переменную $y_m = \left(1+\dfrac{1}{x_m}\right)^{x_m}$, где x_m — положительные числа, > 2 (x_m — не обязательно целые).

Справедливо **утверждение**: если $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = +\infty$, то

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_m}\right)^{x_m} = e.$$

▶ 1. Рассмотрим сначала случай, когда все значения переменной x_m являются целыми положительными числами. Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое.

Мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Значит, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что для всех $n > N$ будет

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon.$$

По условию $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = +\infty$. Поэтому можно утверждать, что, начиная с некоторого места, т. е. при $m > M$ ($M \in \mathbb{N}$) будет: $x_m > N$. У нас, по предположению, все значения переменной x_m — целые положительные числа. Поэтому при всех $m > M$ будет иметь место неравенство

$$\left|\left(1+\frac{1}{x_m}\right)^{x_m} - e\right| < \varepsilon.$$

А это означает, что $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_m}\right)^{x_m} = e$.

Отметим, что даже в рассмотренном случае переменная x_m не обязательно монотонно возрастающая.

2. Пусть теперь значения переменной x_m — положительные числа, > 2, не обязательно целые.

Пусть $\alpha_m = \mathrm{E}(x_m)$ (α_m — наибольшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству: $\alpha_m \le x_m$). Ясно, что $\alpha_m \ge 2$; $\alpha_m \to +\infty$, если $x_m \to +\infty$. Имеем

$$\alpha_m - 1 < x_m < \alpha_m + 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_m - 1} > \frac{1}{x_m} > \frac{1}{\alpha_m + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\alpha_m - 1} > 1 + \frac{1}{x_m} > 1 + \frac{1}{\alpha_m + 1}.$$

А тогда

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_m - 1}\right)^{\alpha_m + 1} > \left(1+\frac{1}{x_m}\right)^{x_m} > \left(1+\frac{1}{\alpha_m + 1}\right)^{\alpha_m}. \qquad (4)$$

Имеем

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_m - 1}\right)^{\alpha_m + 1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{\alpha_m - 1}\right)^{\alpha_m - 1}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{\alpha_m - 1}\right)^{2}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 1} \xrightarrow[m\to\infty]{} e \cdot 1 = e;$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha_m + 1}\right)^{\alpha_m} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{\alpha_m + 1}\right)^{\alpha_m + 1}}{\left(1+\dfrac{1}{\alpha_m + 1}\right)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{e}{1} = e.$$

А тогда из (4), по теореме о сжатой переменной, находим

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_m}\right)^{x_m}=e.$$

Подчеркнем еще раз, что здесь переменная x_m — любая стремящаяся к $+\infty$. (x_m может и не быть монотонной). ◀

Некоторые свойства числа e, которые будут установлены позже, делают выгодным выбор этого числа в качестве основания для системы логарифмов.

Определение. Логарифм числа x ($x > 0$), вычисленный по основанию e, называют *натуральным логарифмом* и обозначают знаком: $\ln x$ (без указания основания).

Установим связь между натуральным логарифмом числа x и логарифмом этого числа по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$).

Имеем $x = e^{\ln x}$. Прологарифмируем это равенство по основанию a. Получим

$$\log_a x = \ln x \cdot \log_a e$$

($\log_a e$ — модуль перехода). В частности, если $a = 10$, то будем иметь

$$\lg x = \ln x \cdot \lg e = M \ln x, \text{ где } M = \lg e = 0.434294\ldots.$$

Такова связь между десятичными и натуральными логарифмами.

§ 10. Принцип выбора Больцано — Вейерштрасса

Теорема. Из всякой ограниченной последовательности

$$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \tag{1}$$

можно выделить такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$, которая стремится к конечному пределу.

(Например, у последовательности: $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ нет предела, но мы из нее можем выделить две подпоследовательности: $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ и $-1, -1, -1, \ldots, -1, \ldots$, каждая из которых имеет конечный предел.)

▶ По условию последовательность (1) — ограниченная. Значит, существуют два конечных числа a_0 и b_0 такие, что при всех $n \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство: $a_0 \le x_n \le b_0$, т. е. при всех $n \in \mathbf{N}$: $x_n \in [a_0, b_0]$.

Разделим промежуток $[a_0, b_0]$ пополам. Хотя бы в одной половине этого промежутка будет содержаться бесконечное множество элементов последовательности (1) (так как иначе во всем промежутке $[a_0, b_0]$ их было бы конечное число). Обозначим эту половину через $[a_1, b_1]$. (Если обе половины промежутка $[a_0, b_0]$ содержат бесконечное множество элементов последовательности (1), то через $[a_1, b_1]$ обозначаем любую, но только одну из них.)

Ясно, что $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$ и что $a_0 \le a_1 < b_1 \le b_0$.

С промежутком $[a_1, b_1]$ поступаем также, т. е. делим его пополам и берем ту из половин, которая содержит бесконечное множество элементов последовательности (1). Обозначаем эту половину через $[a_2, b_2]$. Ясно, что $b_2 - a_2 = \dfrac{b_0 - a_0}{2^2}$ и что $a_0 \le a_1 \le a_2 < b_2 \le b_1 \le b_0$.

Продолжая этот процесс, мы получим две бесконечные последовательности:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots (a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le \ldots) \tag{2}$$

и

$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots (b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_k \ge \ldots). \tag{3}$$

Заметим еще, что $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Последовательность (2) — неубывающая и ограниченная сверху, например, числом b_0; последовательность (3) невозрастающая и ограниченная снизу, например, числом a_0. Значит, обе эти последовательности имеют конечные пределы.

Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = c$ (c — обозначение предела последовательности (2)). Имеем $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \Rightarrow b_k = a_k + \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$. Так как

$$\lim_{k \to \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0,$$

$$\text{то } \lim_{k \to \infty} b_k = \lim_{k \to \infty} a_k + \lim_{k \to \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^k} = c + 0 = c.$$

Видим, что последовательности (2) и (3) имеют один и тот же конечный предел c. Покажем теперь, что из последовательности (1) можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{4}$$

такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

В самом деле, из элементов последовательности (1), попавших в промежуток $[a_1, b_1]$, возьмем какой-нибудь один. Пусть это будет x_{n_1}. Так как элементами $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ последовательности (1) (даже если все они попали в $[a_2, b_2]$) не исчерпывается множество всех элементов последовательности (1), которые попали в промежуток $[a_2, b_2]$, то в $[a_2, b_2]$ имеются x_n такие, у которых номер $n > n_1$. Возьмем какой-нибудь один из них. Пусть это будет x_{n_2}. Итак, $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$, причем $n_2 > n_1$.

Аналогичным образом можно найти x_{n_3} такой, что $x_{n_3} \in [a_3, b_3]$ и $n_3 > n_2$. Продолжая этот процесс, мы придем к последовательности

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{4}$$

такой, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ и при всяком k: $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Выделенная из (1) подпоследовательность (4) будет требуемой, ибо при всяком k:

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k, \text{ а } \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c.$$

Значит, по теореме о сжатой переменной $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. ◀

§ 11. Общий признак сходимости числовых последовательностей (критерий Коши)

Теорема. Пусть имеется последовательность

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}. \tag{1}$$

Для того, чтобы последовательность (1) имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon > 0$ отвечал номер N такой, что как только $n > N$ и $m > N$, так сейчас же

$$|x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{2}$$

▶ *Необходимость.* Дано последовательность (1) имеет конечный предел. Пусть $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (l — конечное число). Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Так как $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что при всех $n > N$ будет: $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $n > N$ и $m > N$ ($n, m \in \mathbf{N}$). Имеем

$$x_n - x_m = (x_n - l) + (l - x_m) \Rightarrow |x_n - x_m| \le |x_n - l| + |l - x_m|.$$

Так как $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|l - x_m| = |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, если $n > N$ и $m > N$, то $|x_n - x_m| < \varepsilon$ при $n > N$ и $m > N$. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что как только $n > N$ и $m > N$, так сейчас же

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

1. Покажем сначала, что при этом условии последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ — ограниченная. Действительно, возьмем любой номер m, удовлетворяющий условию $m > N$ и обозначим его через m_0 (номер m_0 закреплен). Тогда из условия (3) следует $|x_n - x_{m_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n > N$. Имеем

$$x_n = (x_n - x_{m_0}) + x_{m_0} \Rightarrow |x_n| \le |x_n - x_{m_0}| + |x_{m_0}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + |x_{m_0}|$$

при всех $n > N$. Этому неравенству могут не удовлетворять лишь $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (или только некоторые из этих значений переменной x_n; во всяком случае их будет конечное число, меньшее или равное N). Поэтому приходим к заключению, что переменная x_n — ограниченная.

Мы знаем, что из любой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую конечный предел. Пусть этой подпоследовательностью будет

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{4}$$

и пусть $x_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} l$ (l — конечное число).

2. Покажем теперь, что последовательность (1) имеет своим пределом именно это число l.

У нас по условию любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N такой, что если $n > N$ и $m > N$, то $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так как $n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, то по числу N можно указать номер K такой, что при всех $k > K$ будет $n_k > N$. Следовательно, для любого $n > N$ и при всех $k > K$ будет

$$\left|x_n - x_{n_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ или } x_{n_k} - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_{n_k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$. Будем иметь для любого n, удовлетворяющего условию $n > N$:

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \le x_n \le l + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \left|x_n - l\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, $\left|x_n - l\right| < \varepsilon$ при всех $n > N$. А это означает, что $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ◀

Замечание. Было доказано, что для сходимости последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ необходимо и достаточно, чтобы любому $\varepsilon > 0$ отвечал номер N такой, что как только $m > N$ и $n > N$, так сейчас же $\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$.

Пусть для определенности $m > n$ ($n > N$). Положим $m = n + p$, где $p \in \mathrm{N}$. Тогда $x_m - x_n = x_{n+p} - x_n$, и, следовательно, критерий Коши может быть сформулирован так. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать номер N такой, что при всех $n > N$ и при любом $p \in \mathrm{N}$ имело бы место неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Пример 1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$, где $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое и рассмотрим разность $\left|x_{n+p} - x_n\right|$. Имеем

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| =$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ \dots\ +\frac{1}{(n+p)^2}<$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ \dots\ +\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ \dots\ +$$

$$+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

при всех $p\in\mathbf{N}$. Таким образом, получили: при всех $p\in\mathbf{N}$ $|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{n}$.

Рассмотрим неравенство: $\frac{1}{n}<\varepsilon\ \Rightarrow\ n>\frac{1}{\varepsilon}$. Если положить $N=\mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, то при всех $n>N$ будет $\frac{1}{n}<\varepsilon$, а, следовательно, при всех $n>N$ и при любом $p\in\mathbf{N}$ и подавно будет $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

Вывод: заданная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ сходится. ◀

Пример 2. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}=\left\{\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{2^3}+\ \dots\ +\frac{\sin n}{2^n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$.

▶ Возьмем $\varepsilon>0$ — любое, сколь угодно малое. Имеем

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\ \dots\ +\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\le$$

$$\le\frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}}+\frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}}+\ \dots\ +\frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}}\le$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ \dots\ +\frac{1}{2^{n+p}}<$$

$$<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ \dots\ +\frac{1}{2^{n+p}}+\frac{1}{2^{n+1+p}}+\ \dots\ =\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$$

при всех $p \in \mathrm{N}$. Таким образом, получили: при всех $p \in \mathrm{N}$ $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \frac{1}{2^n}$. Рассмотрим неравенство

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \ln 2 > -\ln \varepsilon \Rightarrow n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$$

(считаем $0 < \varepsilon < 1$). Положим $N = \mathrm{E}\left(-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right)$. Тогда при всех $n > N$ будет: $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, а, следовательно, при всех $n > N$ и при любом $p \in \mathrm{N}$ и подавно будет $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Вывод: заданная последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ сходится. ◀

Пример 3. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathrm{N}}$.

▶ Возьмем ε — любое, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ и рассмотрим разность $\left|x_{n+p} - x_n\right|$. Имеем

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}.$$

Здесь в правой части имеется p слагаемых; $\frac{1}{n+p}$ — наименьшее из этих слагаемых. Если каждое слагаемое в правой части заменить на наименьшее, то получим $\left|x_{n+p} - x_n\right| > \frac{p}{n+p}$, откуда при $p = n$ будем иметь $\left|x_{n+p} - x_n\right| > \frac{1}{2} > \varepsilon$, для всех n.

Вывод: заданная последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ расходится. ◀

Глава 3

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1. Понятие функции

В науке и практической деятельности нам приходится встречаться с величинами самой разнообразной природы: время, длина, площадь, объем, вес, масса, температура и т. п. Любая из этих величин, смотря по обстоятельствам, то принимает различные значения, то лишь одно. В первом случае мы имеем дело с переменной величиной, а во втором — с постоянной.

Мы сказали "смотря по обстоятельствам" Этим мы хотим подчеркнуть, что одна и та же по наименованию величина в одних условиях может быть постоянной, в других — переменной. Например, если речь идет об объеме, то объем комнаты, в которой мы находимся, — постоянная величина, а объем резинового шарика во время наполнения его газом — переменная величина.

В математике, однако, мы отвлекаемся от физического смысла рассматриваемой величины, интересуясь лишь числом, которым она выражается; физический смысл величины снова приобретает важность, лишь когда занимаются приложениями математики. Таким образом, для нас переменная величина (или короче — *переменная*) является отвлеченной или числовой переменной. Ее обозначают каким-либо символом (например, буквой x), которому приписывают числовые значения.

Переменная считается заданной, если указано множество $X = \{x\}$ значений, которые она может принять.

Постоянную величину (короче — *постоянную*) удобно рассматривать как частный случай переменной; он отвечает предположению, что множество $X = \{x\}$ состоит из одного элемента.

Пусть имеются две переменные x и y. Пусть переменная x изменяется на множестве $X = \{x\}$, а переменная y — на множестве $Y = \{y\}$.

Если каждому значению переменной x из множества $X = \{x\}$ по определенному закону ставится в соответствие некоторое число y из множества $Y = \{y\}$, то говорят, что на множестве $X = \{x\}$ задана *функция* $y = y(x)$ или $y = f(x)$.

При этом переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом* функции; множество $X = \{x\}$ — *областью задания* функции; множество $Y = \{y\}$ — *областью изменения* функции.

Приведем примеры функций.

1. $y = x^2$. Эта функция задана на множестве $X = (-\infty, +\infty)$. Множество значений этой функции $Y = [0, +\infty)$.

2. $y = \sqrt{1 - x^2}$. Функция задана на множестве $X = [-1, 1]$. Множество всех значений этой функции $Y = [0, 1]$.

3. Функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция задана на множестве $X = (-\infty, +\infty)$, а множество всех ее значений Y состоит из двух чисел: 0 и 1.

4. $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad x > 0; \\ 0, & \text{если} \quad x = 0; \\ -1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$ (Обозначение sgn происходит от латинского слова signum — знак.) Эта функция задана на множестве $X = (-\infty, +\infty)$, а множество всех ее значений Y состоит из трех чисел: -1, 0, $+1$ (рис. 3.1).

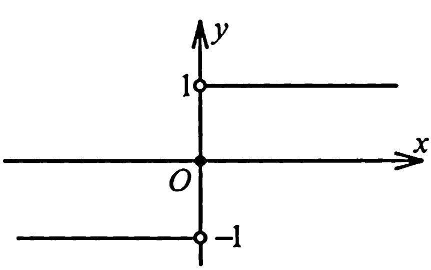


Рис. 3.1. К примеру 4

5. $y = \mathrm{E}(x)$ — обозначает целую часть вещественного числа x. Читается: "y равно

антье x" (от французского слова entier — целый). Эта функция задана на множестве $X = (-\infty, +\infty)$, а множество всех ее значений Y состоит из целых чисел (см. рис. 3.2).

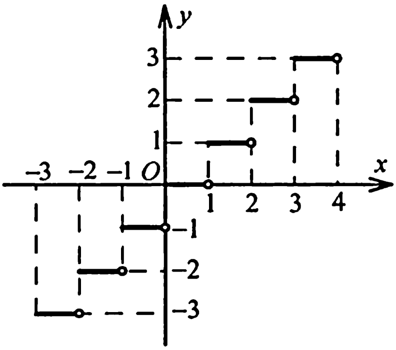


Рис. 3.2. К примеру 5

Замечание. В математическом анализе чаще всего приходится иметь дело с функциями, для которых область задания и область изменения представляют собой некоторые промежутки. Однако далеко не все функции обладают этим свойством (о чем свидетельствуют и некоторые из приведенных выше примеров). Поэтому-то мы и говорим лишь "чаще всего".

В примерах 1, 2, 3, 4 и 5 закон соответствия между переменными x и y характеризовался некоторой формулой, указывающей те действия, которые надо произвести над значениями независимой переменной x и другими числами, входящими в формулу, чтобы получить соответствующие значения функции y. Такой способ задания функции называется *аналитическим*. Следует подчеркнуть, что функция может определяться разными формулами на разных участках области своего задания.

Например, функция

$$y = \begin{cases} \sin x & \text{пр,} \quad x \le 0, \\ x^2 & \text{пр,} \quad x > 0 \end{cases}$$

задана аналитическим способом на множестве $X = (-\infty, +\infty)$ (см. рис. 3.3).

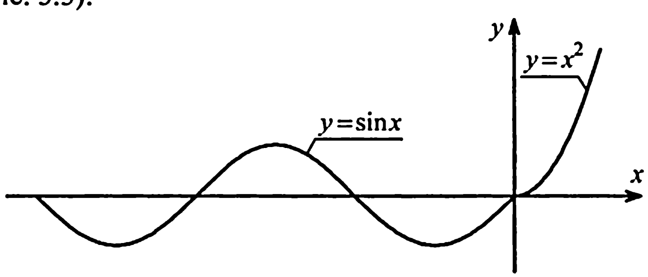


Рис. 3.3

Довольно распространенным способом задания функции является *табличный способ.* В этом случае выписывается ряд значений независимой переменной и соответствующих им значений функции. К таблицам часто прибегают при записи результатов экспериментов, когда никакие формулы заранее неизвестны. При этом можно приближенно вычислить не содержащиеся в таблице значения функции, соответствующие промежуточным значениям аргумента. Для этого используется способ интерполяции, заключающийся в замене функции между ее табличными значениями какой-либо простой функцией (например, линейной или квадратичной).

В практике физических измерений используется и еще один способ задания функций — *графический*, при котором соответствие между аргументом и функцией задается посредством графика (снимаемого, например, на осциллографе). Получив кривую, с нее "снимают" значения функции, отвечающие нужным значениям x.

§ 2. Предел функции

Станем рассматривать функцию $y = f(x)$, определенную на некотором множестве $X = \{x\}$, и точку a. Точка a может принадлежать, а может и не принадлежать множеству X, но обладает тем свойством, что в любой δ-окрестности точки a имеются точки множества X, отличные от a. Например, точка a может быть граничной точкой интервала, на котором определена функция $y = f(x)$.

Определение 1 ("на языке последовательностей"). Составляем последовательность значений аргумента x:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1}$$

произвольную, но такую, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Последовательности (1) будет соответствовать последовательность значений функции $f(x)$:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots . \tag{2}$$

Если для любой последовательности (1), сходящейся к a, последовательность (2) имеет своим пределом одно и то же число A, то это число А называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$.

Запись: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Замечание 1. Условие $x_n \in X$, $x_n \neq a$, нужно для того, чтобы имело смысл говорить о последовательности (2).

Замечание 2. Чтобы убедиться в справедливости соотношения:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

недостаточно взять какую-нибудь последовательность (1), сходящуюся к a, и показать, что соответствующая последовательность (2) сходится к A. Нужно убедиться в том, что последовательность (2) сходится к A при любой последовательности (1), сходящейся к a.

Например, пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Эта функция определена на множестве $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (т. е. определена на всей вещественной оси, кроме точки $x = 0$). Выясним, существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Для этого возьмем последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}} = \left\{\frac{1}{n\pi}\right\}_{n\in\mathrm{N}}$. (Здесь $x_1 = \frac{1}{\pi}$, $x_2 = \frac{1}{2\pi}$, $x_3 = \frac{1}{3\pi}$, ..., $x_n = \frac{1}{n\pi}$, ...) Видим, что $x_n \in X$, $x_n \neq 0$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Соответствующая последовательность значений функции будет такой:

$$f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, f(x_3) = 0, \ldots, f(x_n) = 0, \ldots .$$

Следовательно, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Тем не менее, соотношение $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = 0$ неверно.

В самом деле, возьмем другую последовательность

$$\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathrm{N}} = \left\{\frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right\}_{n\in\mathrm{N}}.$$

(Здесь $\tilde{x}_1 = \frac{1}{2\pi + \pi/2}$, $\tilde{x}_2 = \frac{1}{4\pi + \pi/2}$, $\tilde{x}_3 = \frac{1}{6\pi + \pi/2}$, ..., $\tilde{x}_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$, ...) Видим, что $\tilde{x}_n \in X$, $\tilde{x}_n \neq 0$ и $\tilde{x}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а соответствующая последовательность значений функции $f(\tilde{x}_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$, ибо

$$f(\tilde{x}_1) = 1, f(\tilde{x}_2) = 1, f(\tilde{x}_3) = 1, \ldots, f(\tilde{x}_n) = 1, \ldots .$$

Вывод: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует.

Рассмотрим теперь другой пример.

Пусть $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+20}-5}{x-5}$ (корень арифметический). Эта функция определена на множестве $X = [-20, 5) \cup (5; +\infty)$. Возьмем последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ любую, но такую, что $x_n \in X$ ($\Rightarrow x_n \neq 5$) и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 5$. Для соответствующей последовательности значений функции $f(x)$: $\{f(x_n)\}_{n\in\mathrm{N}} = \left\{\dfrac{\sqrt{x_n+20}-5}{x_n-5}\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x_n+20}-5}{x_n-5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x_n+20}-5\right)\left(\sqrt{x_n+20}+5\right)}{(x_n-5)\left(\sqrt{x_n+20}+5\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x_n+20}+5} = \frac{1}{10}.$$

В этом примере вычисление, приведшее нас к числу $\frac{1}{10}$, использует лишь условия $x_n \in X$ ($x_n \neq 5$) и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 5$, оставляя последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ в остальном произвольной. Значит, всякий раз, когда $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 5$, пробегая любую последовательность значений (лишь бы $x_n \in X$ ($\Rightarrow x_n \neq 5$)), величина $f(x_n)$ пробегает последовательность, имеющую своим пределом всегда одно и то же число $\frac{1}{10}$.

Вывод: $\lim\limits_{x\to5} f(x) = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{x+20}-5}{x-5} = \dfrac{1}{10}$.

Замечание 3. В определении 1 предела функции $f(x)$ a и A могут обозначать и числа, и символы ∞, $+\infty$, $-\infty$. Если A — число, то предел называется *конечным*. Если же A есть один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$, то предел называется *бесконечным*.

Рассмотрим несколько примеров, когда либо a, либо A оказываются символами ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Пусть $f(x)=\dfrac{5x^3+2x^2-1}{4x^3-x}$. Эта функция определена на множестве

$$X=\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right).$$

1. Выясним, существует или нет $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Для этого берем последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ — любую, но такую, что $x_n\in\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Для соответствующей последовательности значений функции $f(x)$ будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{5x_n^3+2x_n^2-1}{4x_n^3-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{2}{x_n}-\dfrac{1}{x_n^3}}{4-\dfrac{1}{x_n^2}}=\frac{5}{4}.$$

Так как $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ — любая последовательность, удовлетворяющая условиям $x_n\in\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, то в соответствии с высказанным выше определением предела функции “на языке последовательностей” можно написать

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2x^2-1}{4x^3-x}=\frac{5}{4}.$$

2. Если взять последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ — любую, но такую, что $x_n\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, то совершенно аналогично придем к выводу, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ существует и что он равен $\frac{5}{4}$.

3. Станем рассматривать функцию $f(x)=\dfrac{5x^3+2x^2-1}{4x^3-x}$, например, на множестве $X^{*}=\left[-\frac{1}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ — любую, но такую, что $x_n\in X^{*}$ ($\Rightarrow x_n\neq 0$) и $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Представим соответствующую последовательность значений функции $f(x)$ в виде:

$$f(x_n)=\frac{5x_n^3+2x_n^2-1}{4x_n^3-x_n}=\frac{1}{x_n}\cdot\frac{5x_n^3+2x_n^2-1}{4x_n^2-1}.$$

Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5x_n^3+2x_n^2-1}{4x_n^2-1}=1\,(\neq 0)$; переменная $\dfrac{1}{x_n}$ — бесконечно большая при $n\to\infty$, как переменная, обратная бесконечно малой при $n\to\infty$. Следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ — бесконечно большая при $n\to\infty$ как произведение бесконечно большой величины на переменную, имеющую предел, отличный от нуля.

Вывод: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+2x^2-1}{4x^3-x}=\infty$.

4. Станем рассматривать функцию $f(x)=\dfrac{5x^3+2x^2-1}{4x^3-x}$, например, на множестве $\tilde{X}=\left[-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$.

Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ — любую, но такую, что $x_n\in\tilde{X}$ ($\Rightarrow x_n\neq-\frac{1}{2}$) и $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}$. Представим соответствующую последовательность значений функции $f(x)$ в виде: $f(x_n)=$ $=\dfrac{1}{x_n+\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{5x_n^3+2x_n^2-1}{4x_n\left(x_n-\frac{1}{2}\right)}$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5x_n^3+2x_n^2-1}{4x_n\left(x_n-\frac{1}{2}\right)}=-\dfrac{9}{16}\,(\neq 0)$;

переменная $\dfrac{1}{x_n + \dfrac{1}{2}}$ — бесконечно большая при $n \to \infty$, как переменная, обратная бесконечно малой при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}_{n \in \mathrm{N}}$ — бесконечно большая при $n \to \infty$ как произведение бесконечно большой величины на переменную, имеющую предел, отличный от нуля.

Вывод: $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = \infty$.

5. Рассматривая функцию $f(x) = \dfrac{5x^3 + 2x^2 - 1}{4x^3 - x}$, например, на множестве $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$, совершенно аналогично предыдущему, можно убедиться, что $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \infty$.

Определение 2 („на языке $\varepsilon - \delta$"). Пусть a и A — конечные числа. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого, сколь угодно малого, числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$, $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$, так сейчас же $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Множество значений аргумента x из X, удовлетворяющих условиям: $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$ будем называть *проколотой* δ*-окрестностью* точки a и обозначать через $\mathring{u}_\delta(a)$.

Сущность соотношения $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ состоит в следующем: значения функции $f(x)$ должны содержаться в любой, сколь угодно малой, наперед заданной ε-окрестности предела A, как только значения независимой переменной оказываются лежащими в надлежащим образом выбранной проколотой δ-окрестности точки a.

Определения 1 и 2 предела функции $f(x)$ при $x \to a$ равносильны. Докажем это.

▶ I. Пусть число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ в смысле определения 2. Покажем, что A будет пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ и в смысле определения 1. Для этого возьмем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ любую, но такую, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, и покажем, что соответствующая последовательность значений функции $f(x)$:

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$$

сходится к A.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое.

Так как число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$ в смысле определения 2, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in \mathring{u}_\delta(a)$, так сейчас же $|f(x) - A| < \varepsilon$. Но последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$, которую мы взяли, такова, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Значит, по числу $\delta > 0$ (найденному по числу $\varepsilon > 0$) можно указать номер N, такой, что при всех $n > N$ будет: $x_n \neq a$ и $|x_n - a| < \delta$, т. е. $x_n \in \mathring{u}_\delta(a)$, если $n > N$. Но у нас для всех $x \in \mathring{u}_\delta(a)$: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, если $n > N$.

Итак, для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти (при помощи $\delta > 0$) номер N такой, что $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, если $n > N$. А это означает, что $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$, и потому число A будет пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ в смысле определения 1.

II. Пусть теперь число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ в смысле определения 1. Покажем, что число A будет пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ и в смысле определения 2.

Рассуждаем от противного. Допустим, что число A не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ в смысле определения 2. Но тогда не всякому числу $\varepsilon > 0$ соответствует число $\delta > 0$ в смысле определения 2. Значит, найдется хотя бы одно $\varepsilon_0 > 0$ такое, которому не соответствует (в смысле определения 2) никакое число $\delta > 0$.

Возьмем $\delta_1 = 1 (> 0)$. Не может оказаться, чтобы для всех x, удовлетворяющих неравенству: $|x - a| < \delta_1$ ($x \in X$ и $x \neq a$) было бы $|f(x)-A|<\varepsilon_0$ (иначе наше δ_1 соответствовало бы ε_0 в смысле определения 2). Поэтому среди тех x, которые удовлетворяют неравенству: $|x-a|<\delta_1$ ($x\in X$ и $x\neq a$) обязательно найдется хотя бы одно $x=x_1$ такое, что будет $|f(x_1)-A|\geq\varepsilon_0$ ($x_1\in X$ и $x_1\neq a$).

Возьмем $\delta_2=\frac{1}{2}(>0)$. Не может оказаться, чтобы для всех x, удовлетворяющих неравенству: $|x-a|<\delta_2$ ($x\in X$ и $x\neq a$) было бы $|f(x)-A|<\varepsilon_0$ (иначе наше $\delta_2>0$ соответствовало бы ε_0 в смысле определения 2). Поэтому среди тех x, которые удовлетворяют неравенству: $|x-a|<\delta_2$ ($x\in X$ и $x\neq a$), обязательно найдется хотя бы одно $x=x_2$ такое, что будет $|f(x_2)-A|\geq\varepsilon_0$ ($x_2\in X$ и $x_2\neq a$).

Продолжаем этот процесс аналогичным образом дальше. На n-м шаге возьмем $\delta_n=\frac{1}{n}$ ($n\in\mathbf{N}$). Не может оказаться, чтобы для всех x, удовлетворяющих неравенству: $|x-a|<\delta_n$ ($x\in X$ и $x\neq a$), было бы $|f(x)-A|<\varepsilon_0$ (иначе наше $\delta_n>0$ соответствовало бы ε_0 в смысле определения 2). Поэтому среди тех x, которые удовлетворяют неравенству: $|x-a|<\delta_n$ ($x\in X$ и $x\neq a$), обязательно найдется хотя бы одно $x=x_n$ такое, что будет $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$ ($x_n\in X$ и $x_n\neq a$).

При неограниченном продолжении рассматриваемого процесса у нас образуется последовательность: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, такая, что $x_n\in X$, $x_n\neq a$ и $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$ (в самом деле, имеем $|x_n-a|<\frac{1}{n}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n}$. Отсюда ясно, что $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$).

Так как число A есть предел функции $f(x)$ при $x\to a$ в смысле определения 1, то должно оказаться, что

$$f(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}A.$$

А потому любому $\varepsilon>0$ (в частности, $\varepsilon=\varepsilon_0>0$) должен отвечать номер N такой, начиная с которого, т. е. при $n>N$, должно выполняться неравенство:

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon_0.$$

Но у нас по самому построению последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, для всех $n \in \mathbf{N}$: $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения II. ◀

Замечание. В определении 2 предела функции $f(x)$ при $x \to a$ у нас a и A были конечными числами. Отметим, что a и A могут быть и символами (несобственными числами): $+\infty$, $-\infty$. Если либо a, либо A (либо a и A оба сразу) — несобственные числа, то определение предела функции $f(x)$ (в зависимости от того, какой случай имеет место) будет следующим.

1. Пусть $a = +\infty$; A — конечное число.

Число A называется *конечным пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\Delta > 0$ такое, что как только $x > \Delta$ ($x \in X$), так сейчас же

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Пусть $a = -\infty$; A — конечное число.

Число A называется *конечным пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\Delta > 0$ такое, что как только $x < -\Delta$ ($x \in X$), так сейчас же

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Запись: $A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Пусть a — конечное число; $A = +\infty$.

Говорят, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$, и пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

если любому, как угодно большому, числу $M > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{u}_\delta(a)$ ($\mathring{u}_\delta(a) \subset X$) имеет место неравенство: $f(x) > M$.

4. Пусть a — конечное число; $A = -\infty$.

Говорят, что $f(x) \to -\infty$ при $x \to a$, и пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

если любому, как угодно большому, числу $M > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{u}_\delta(a)$ $(\mathring{u}_\delta(a) \subset X)$ имеет место неравенство: $f(x) < -M$.

5. Пусть $a = +\infty$; $A = +\infty$.

Говорят, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, и пишут

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

если любому, как угодно большому, числу $M > 0$ отвечает число $\Delta > 0$ такое, что как только $x > \Delta$ (и $x \in X$), так сейчас же имеет место неравенство: $f(x) > M$.

6. Пусть $a = +\infty$; $A = -\infty$.

Говорят, что $f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$, и пишут

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

если любому, как угодно большому, числу $M > 0$ отвечает число $\Delta > 0$ такое, что как только $x > \Delta$ (и $x \in X$), так сейчас же имеет место неравенство: $f(x) < -M$.

7. Пусть $a = -\infty$; $A = +\infty$.

Говорят, что $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$, и пишут

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

если любому, как угодно большому, числу $M > 0$ отвечает число $\Delta > 0$ такое, что как только $x < -\Delta$ (и $x \in X$), так сейчас же имеет место неравенство: $f(x) > M$.

8. Пусть $a = -\infty$; $A = -\infty$.

Говорят, что $f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$, и пишут

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

если любому, как угодно большому, числу $M > 0$ отвечает число $\Delta > 0$ такое, что как только $x < -\Delta$ (и $x \in X$), так сейчас же имеет место неравенство: $f(x) < -M$.

§ 3. Односторонние пределы функций

Пусть a и A — конечные числа.

Определение. Число A называют *правым пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$ и пишут: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ или $f(a+0) = A$, если для любого, сколь угодно малого, числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $a < x < a + \delta$, так сейчас же $|f(x) - A| < \varepsilon$ (т. е. для всех $x \in u_\delta^+(a)$ оказывается $f(x) \in u_\varepsilon(A)$; здесь $u_\delta^+(a)$ — правая полуокрестность точки a).

Определение. Число A называют *левым пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$ и пишут: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ или $f(a-0) = A$, если для любого, сколь угодно малого, числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $a - \delta < x < a$, так сейчас же $|f(x) - A| < \varepsilon$ (т. е. для всех $x \in u_\delta^-(a)$ оказывается $f(x) \in u_\varepsilon(A)$; здесь $u_\delta^-(a)$ — левая полуокрестность точки a).

Замечание 1. Справедливы утверждения:

1) если у функции $f(x)$ при $x \to a$ существует предел A в обычном смысле, т. е. двусторонний, то существуют оба односторонних предела: $f(a+0)$ и $f(a-0)$, причем оба они равны A;

2) если у функции $f(x)$ при $x \to a$ существуют оба односторонних предела: $f(a+0)$, $f(a-0)$ и оба они равны числу A, то у $f(x)$ при $x \to a$ существует двусторонний предел, равный указанным односторонним пределам, т. е. числу A.

В качестве упражнения утверждения 1) и 2) предлагается доказать самостоятельно.

Замечание 2. В определении односторонних пределов функции $f(x)$ при $x \to a$ число A предполагалось конечным. Отметим, что A может быть и числом несобственным: $+\infty$ или $-\infty$.

§ 4. Два важных предела

I. Предел функции $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$.

Установим, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

▶ Так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, то $\lim\limits_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to +0} \frac{\sin x}{x}$, если эти пределы существуют. Поэтому, чтобы установить (1), достаточно доказать, что существует и равен 1 хотя бы один односторонний предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$, например, правый, т. е. достаточно доказать, что

$$\lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (2)$$

Так как мы станем устанавливать справедливость соотношения (2), то можно рассматривать лишь значения x, удовлетворяющие неравенству: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

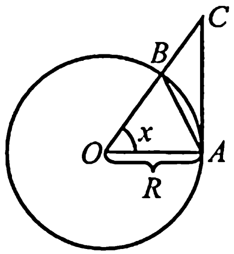


Рис. 3.4

В круге радиуса R рассмотрим угол $\angle AOB$, радианная мера которого x $(0 < x < \frac{\pi}{2})$; хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (см. рис. 3.4). Имеем очевидные неравенства: площадь $\Delta AOB <$ площади сектора $AOB <$ площади ΔAOC (при этом мы пользуемся теми сведениями о площадях элементарных фигур, которые известны из школьного курса), или

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x,$$

откуда

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right). \qquad (3)$$

Разделим каждый из членов неравенства (3) на $\sin x$ $(\sin x > 0)$. Получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Вычитая из 1 каждый из членов последнего неравенства, будем иметь

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x. \qquad (4)$$

Но $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$ (в силу (3)). Следовательно, вместо неравенства (4) будем иметь

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x. \qquad (5)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое (можно считать, что $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$). Ясно, что если положить $\delta = \varepsilon$ ($\delta > 0$), то для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < x < \delta$, будет

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon,$$

ибо если $x < \delta$, то $x < \varepsilon$. Значит, $\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$, если $0 < x < \delta$. Последнее означает, что $1 = \lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}$. Видим, что соотношение (2) установлено, а значит, доказано и соотношение (1). ◀

II. Предел функции $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$.

1) Установим сначала, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. На этот раз воспользуемся определением предела функции "на языке последовательностей".

▶ Составим последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — любую, но такую, что $x_n > 2$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Соответствующая последовательность значений функции будет такой: $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

В § 9 гл. 2 было показано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Так как $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — любая последовательность, удовлетворяющая условиям $x_n > 2$

и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, то в соответствии с определением предела функции "на языке последовательностей" можно написать $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. ◀

2) Покажем теперь, что и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

▶ Для этого составляем последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — любую, но такую, что $x_n < -3$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Если положить $x_n = -1 - y_n$, то $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (и все $y_n > 2$). Имеем

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1-\frac{1}{1+y_n}\right)^{-1-y_n} = \left(\frac{y_n}{1+y_n}\right)^{-1-y_n} = \left(\frac{y_n+1}{y_n}\right)^{y_n+1} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \cdot \left(1+\frac{1}{y_n}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y_n}\right) = 1$, то получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right) = e.$$

Так как $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — любая последовательность, удовлетворяющая условиям $x_n < -3$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, то в соответствии с определением предела функции "на языке последовательностей" можно написать $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. ◀

В выражении $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ заменим переменную x на $\dfrac{1}{\alpha}$. Получим функцию $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Возьмем последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ — любую, но такую, что $\alpha_n > 0$ и $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тогда $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

А это означает, что $\lim\limits_{\alpha\to+0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Возьмем теперь последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ — любую, но такую, что $\alpha_n < 0$ и $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Но тогда $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

А это означает, что $\lim\limits_{\alpha\to-0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Так как правый и левый пределы функции $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ в точке $\alpha = 0$ существуют и равны e, то у этой функции в точке $\alpha = 0$ существует обычный (двусторонний) предел, и он равен e. Таким образом, установлено, что

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{6}$$

Отметим, что полученный результат лежит в основе всех приложений числа e.

§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a (в точке a $f(x)$ может быть определена, а может быть и не определена).

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, когда либо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, либо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, либо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. При этом в случае, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, говорят, что $f(x)$ — положительная бесконечно большая; а в случае, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, говорят, что $f(x)$ — отрицательная бесконечно большая функция при $x \to a$.

Замечание. Буква a может обозначать и число, и один из символов: ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной при $x \to a$, если существует постоянное число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ для всех значений x в некоторой проколотой окрестности a. При этом под окрестностью a, когда a обозначает один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$, соответственно понимают:

в первом случае — множество всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \Delta$, где Δ — постоянное положительное число;

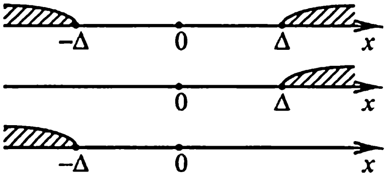
во втором — множество всех x, удовлетворяющих неравенству $x > \Delta$;

в третьем — множество всех x, удовлетворяющих неравенству $x < -\Delta$.

На рис. 3.5 приведены примеры окрестностей ∞, $+\infty$, и $-\infty$.

Отметим следующие свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций при $x \to a$, вытекающие из соответствующих свойств бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

1. Если одна из трех функций $f(x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$ является бесконечно малой при $x \to a$, то и две другие функции также являются бесконечно малыми при $x \to a$.



Окрестность ∞; $x \in (-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, +\infty)$

Окрестность $+\infty$; $x \in (\Delta, +\infty)$

Окрестность $-\infty$; $x \in (-\infty, -\Delta)$

Рис. 3.5

2. Если одна из трех функций $f(x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$ является бесконечно большой при $x \to a$, то и две другие функции также являются бесконечно большими при $x \to a$.

3. Если функция $f(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, а функция $\varphi(x)$ — ограниченная при $x \to a$, то произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

4. Если функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$, а функция $\varphi(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to a$, то произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ есть бесконечно большая функция при $x \to a$.

5. Если функция $f(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности a, то $\dfrac{1}{f(x)}$ есть функция бесконечно большая при $x \to a$.

6. Если функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Остановимся для примера на доказательстве одного из этих свойств, например, свойства 4 (все другие свойства доказываются совершенно аналогично).

Дано: 1) $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$; 2) $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = l$ $(l \neq 0)$.

Требуется доказать, что $f(x) \cdot \varphi(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to a$.

▶ Составляем последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значений x, любую, но такую, что $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ (предполагается, что x_n берутся из окрестности a и $x_n \neq a$).

По условию $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = l$ $(l \neq 0)$. Но тогда и $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n) = l (\neq 0)$. По условию $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to a$. Но тогда и $f(x_n)$ — бесконечно большая последовательность при $n \to \infty$. Следовательно, $f(x_n) \cdot \varphi(x_n)$ — бесконечно большая последовательность, как произведение бесконечно большой последовательности и последовательности, имеющей конечный предел, отличный от нуля.

Так как последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — любая, сходящаяся к a, то заключаем, что

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot \varphi(x) = \infty .$$

А это означает, что функция $f(x) \cdot \varphi(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$. ◀

§ 6. Свойства конечных пределов, связанные с арифметическими действиями над функциями

Сразу отметим, что свойства конечных пределов, связанные с арифметическими действиями над переменными, пробегающими последовательности значений, полностью переносятся на случай, когда конечные пределы при $x \to a$ имеют функции. При этом предполагается, что все рассматриваемые ниже функции определены в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Упомянутую окрестность точки a будем обозначать через $u(a)$. А тогда $\mathring{u}(a)$ — проколотая окрестность точки a.

1. Если функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет конечный предел A, то разность $f(x) - A = \alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

▶ Возьмем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значений x любую, но такую, что $x_n \in \mathring{u}(a)$ и $x_n \underset{n \to \infty}{\to} a$.

По условию $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Но тогда

$$f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} A \Rightarrow (f(x_n) - A) = \alpha(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} 0 .$$

Так как последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ — любая, сходящаяся к a, то заключаем, что $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) - A) = 0$. А последнее означает, что разность $f(x) - A$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$. ◀

2. Если разность между функцией $f(x)$ и некоторым постоянным числом A при $x \to a$ есть бесконечно малая функция, то число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$.

▶ Возьмем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значений x любую, но такую, что $x_n \in \overset{\circ}{u}(a)$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

По условию $\alpha(x) = f(x) - A$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = 0$. Но тогда

$$\alpha(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow (f(x_n) - A) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A.$$

Так как последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ любая, сходящаяся к a, то заключаем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. ◀

3. Пусть имеются две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные в $u(a)$ всюду, за исключением, быть может, точки a. Пусть $\varphi(x) \underset{x\to\infty}{\to} A$, $\psi(x) \underset{x\to\infty}{\to} B$, где A и B — конечные числа. Тогда функции $(\varphi(x) \pm \psi(x))$ также имеют конечный предел при $x \to a$, причем

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x) \pm \psi(x)) = \lim_{x\to a} \varphi(x) \pm \lim_{x\to a} \psi(x) = A \pm B.$$

▶ Возьмем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значений x любую, но такую, что $x_n \in \overset{\circ}{u}(a)$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

По условию $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = B$. Но тогда $\varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$; $\psi(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} B$. Следовательно, $(\varphi(x_n) \pm \psi(x_n)) \underset{n\to\infty}{\to} A \pm B$ (для последовательностей это свойство нам известно).

Так как последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ любая, сходящаяся к a, то заключаем, что

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x) \pm \psi(x)) = A \pm B \left(= \lim_{x\to a} \varphi(x) \pm \lim_{x\to a} \psi(x)\right). ◀$$

Заметим, что доказанное свойство распространяется на любое конечное число слагаемых.

4. Пусть имеются две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные в $u(a)$ всюду, за исключением, быть может, точки a. Пусть $\varphi(x) \underset{x\to a}{\to} A$, $\psi(x) \underset{x\to a}{\to} B$, где A и B — конечные числа. Тогда функция $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ также имеет конечный предел при $x \to a$, причем

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x) \cdot \psi(x)) = \lim_{x\to a} \varphi(x) \cdot \lim_{x\to a} \psi(x) = A \cdot B.$$

▶ Возьмем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значений x любую, но такую, что $x_n \in \mathring{u}(a)$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

По условию $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = B$. Но тогда $\varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$; $\psi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$. Но для последовательностей, как мы знаем, имеет место свойство $\varphi(x_n)\cdot\psi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A\cdot B$. У нас последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ любая, сходящаяся к a. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x)\cdot\psi(x)) = A\cdot B\left(= \lim_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to a}\psi(x)\right). \blacktriangleleft$$

Заметим, что доказанное свойство распространяется на любое конечное число сомножителей.

5. Пусть имеются две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные в $u(a)$ всюду, за исключением, быть может, точки a. Пусть $\varphi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$; $\psi(x) \neq 0$, $x \in \mathring{u}(a)$ и $\psi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} B$, где A и B — конечные числа и $B \neq 0$. Тогда функция $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ также имеет конечный предел при $x \to a$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)} = \frac{A}{B}.$$

▶ Возьмем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значений x любую, но такую, что $x_n \in \mathring{u}(a)$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Имеем, по условию $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \Rightarrow \varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$. Имеем, далее, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = B \Rightarrow \psi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$, причем $B \neq 0$ и при всех $n \in \mathbf{N}$: $\psi(x_n) \neq 0$. Но для таких последовательностей, как мы знаем, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(x_n)}{\psi(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}\psi(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

Так как последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ любая, сходящаяся к a, то, в соответствии с определением предела функции "на языке последовательностей", заключаем, что

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi(x)} = \frac{A}{B}. \blacktriangleleft$$

§ 7. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

I. Пусть имеются две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, определенные в некоторой окрестности $u(a)$ точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые функции при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$. Кроме того, предполагаем, что $\alpha(x) \neq 0$ для $x \in \mathring{u}(a)$. Составим отношение $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

1. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = l$, где $l \neq 0$ и $l \neq \infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *бесконечно малыми одного порядка* при $x \to a$.

$\bar{1}$. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \to a$ и пишут

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to a.$$

2. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, то функцию $\beta(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка* по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \to a$ и пишут

$$\beta(x) = o\big(\alpha(x)\big) \text{ при } x \to a.$$

(Читают: $\beta(x)$ равна *o* малое от $\alpha(x)$ при $x \to a$).

3. Если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty$, то функцию $\beta(x)$ называют *бесконечно малой более низкого порядка* по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \to a$.

4. Если отношение $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ не имеет предела при $x \to a$, то говорят, что бесконечно малые функции $\beta(x)$ и $\alpha(x)$ *не сравнимы* при $x \to a$.

Например, функции $\beta(x) = x\sin\frac{1}{x}$ и $\alpha(x) = x$ — бесконечно малые при $x \to 0$. Имеем $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \sin\frac{1}{x}$. Но $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$. Значит, $\beta(x)$ и $\alpha(x)$ не сравнимы при $x \to 0$.

5. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые функции при $x \to a$ и пусть $k > 0$ — некоторое число, не обязательно целое. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{(\alpha(x))^k} = l$, где $l \neq 0$ и $l \neq \infty$, то функцию $\beta(x)$ называют *бесконечно малой порядка* k по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \to a$.

Нетрудно понять, что:

1) если $k = 1$, то функция $\beta(x)$ бесконечно малая одного порядка с $\alpha(x)$ при $x \to a$;

2) если $k > 1$, то функция $\beta(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \to a$;

3) если $k < 1$, то функция $\beta(x)$ — бесконечно малая более низкого порядка по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \to a$.

Теорема 1. Произведение двух бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной более высокого порядка по сравнению с каждым из сомножителей.

▶ Пусть $\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ и $\beta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, и пусть $\gamma(x) = \alpha(x)\cdot\beta(x)$. Требуется показать, что $\gamma(x) = o\left(\alpha(x)\right)$ и $\gamma(x) = o\left(\beta(x)\right)$ при $x \to a$. Имеем

$$\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\alpha(x)} = \beta(x) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\beta(x) = 0.$$

А это означает, что $\gamma(x) = o\left(\alpha(x)\right)$ при $x \to a$. Имеем, далее,

$$\frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)\cdot\beta(x)}{\beta(x)} = \alpha(x) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0.$$

Последнее означает, что $\gamma(x) = o\left(\beta(x)\right)$ при $x \to a$. ◀

Теорема 2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной по сравнению с каждой из них.

▶ Пусть $\alpha(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ и $\beta(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, и пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$. Положим $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$. Требуется показать, что $\gamma(x) = o(\alpha(x))$ и $\gamma(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$.

Имеем $\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$. По условию $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0$. Значит, $\gamma(x) = o(\alpha(x))$ при $x \to a$.

Имеем, далее, $\dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1$. По условию $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

А тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 1 - 1 = 0$. Значит, $\gamma(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$. ◀

Теорема 3 (о замене бесконечно малых эквивалентными при отыскании предела отношения). Пусть $\alpha(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, $\beta(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ и пусть $\alpha(x) \sim \tilde{\alpha}(x)$, $\beta(x) \sim \tilde{\beta}(x)$ при $x \to a$. Тогда: если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{\tilde{\beta}(x)}{\tilde{\alpha}(x)},$$

то к этому же пределу стремится при $x \to a$ и отношение $\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

▶ 1) Пусть $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\tilde{\beta}(x)}{\tilde{\alpha}(x)} = l$, где l — конечное число. Напишем очевидное равенство

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{\beta(x)}{\tilde{\beta}(x)} \cdot \frac{\tilde{\beta}(x)}{\tilde{\alpha}(x)} \cdot \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\alpha(x)}.$$

По условию каждый из трех сомножителей в правой части имеет конечный предел при $x \to a$. А тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\tilde\beta(x)}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\tilde\beta(x)}{\tilde\alpha(x)}}_{=l}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\tilde\alpha(x)}{\alpha(x)}}_{=1}=1\cdot l\cdot 1=l,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tilde\beta(x)}{\tilde\alpha(x)}$.

2) Пусть теперь $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tilde\beta(x)}{\tilde\alpha(x)}=\infty$. Но тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tilde\alpha(x)}{\tilde\beta(x)}=0$ (считаем, что $\tilde\beta(x)\neq 0$ для $x\in\mathring{u}(a)$). Следовательно, по доказанному в пункте 1), $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$. Значит, и в этом случае $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tilde\beta(x)}{\tilde\alpha(x)}$.

Замечание 1. Применение теоремы 3 требует знания бесконечно малых функций $\tilde\alpha(x)$ и $\tilde\beta(x)$ эквивалентных при $x\to a$ соответственно бесконечно малым функциям $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Приведем несколько примеров эквивалентных бесконечно малых функций.

1) $\sin\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$ (это так, ибо $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$).
2) $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.
3) $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.
4) $a^\alpha-1\sim\alpha\ln a$ при $\alpha\to 0$ ($a>0$, $a\neq 1$).
5) $e^\alpha-1\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.
6) $(1+\alpha)^\mu-1\sim\mu\alpha$ при $\alpha\to 0$.
7) $\arcsin\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.
8) $\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.

Соотношения 2) — 8) будут установлены несколько позже.

Замечание 2. Следует остерегаться делать замену бесконечно малых функций на эквивалентные в сумме, ибо если $\alpha(x)\sim\tilde\alpha(x)$ и $\beta(x)\sim\tilde\beta(x)$ при $x\to a$, то не всегда $\alpha(x)+\beta(x)\sim\tilde\alpha(x)+\tilde\beta(x)$ при $x\to a$.

Рассмотрим пример. Было отмечено, что $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$. Значит,

$$\ln(1+x+x^2)\sim(x+x^2)\ \text{при}\ x\to 0,$$

$$\ln(1-x+x^2) \sim (-x+x^2) \text{ при } x \to 0.$$

Однако сумма $\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)$ не эквивалентна сумме $(x+x^2)+(-x+x^2)$ при $x \to 0$. Действительно, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{(x+x^2)+(-x+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[(1+x^2)^2-x^2\right]}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+x^2)}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2} = \frac{1}{2} \text{ (а не 1).}$$

II. Пусть имеются две функции $A(x)$ и $B(x)$, определенные в некоторой окрестности $u(a)$ точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть (для определенности) функции $A(x)$ и $B(x)$ есть положительные бесконечно большие при $x \to a+0$, т. е.

$$\lim_{x\to a+0} A(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x\to a+0} B(x) = +\infty.$$

Составим отношение $\dfrac{B(x)}{A(x)}$.

1. Если $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{B(x)}{A(x)} = l$, где $l \neq 0$ и $l \neq \infty$, то функции $B(x)$ и $A(x)$ называют *бесконечно большими одного порядка* при $x \to a+0$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{B(x)}{A(x)} = \infty$, то функцию $B(x)$ называют *бесконечно большой более высокого порядка* по сравнению с $A(x)$ при $x \to a+0$.

3. Если $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{B(x)}{A(x)} = 0$, то функцию $B(x)$ называют *бесконечно большой более низкого порядка* по сравнению с $A(x)$ при $x \to a+0$.

4. Если отношение $\dfrac{B(x)}{A(x)}$ не имеет предела при $x \to a+0$, то говорят, что бесконечно большие функции $B(x)$ и $A(x)$ *не сравнимы* при $x \to a+0$.

5. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — две бесконечно большие функции при $x \to a+0$, и пусть $k > 0$ — некоторое число, не обязательно целое. Если $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{B(x)}{(A(x))^k} = l$, где $l \neq 0$ и $l \neq \infty$, то функцию $B(x)$ называют *бесконечно большой порядка* k по сравнению с $A(x)$ при $x \to a+0$.

Ясно, что:

1) если $k = 1$, то функция $B(x)$ — бесконечно большая одного порядка с $A(x)$ при $x \to a+0$;

2) если $k > 1$, то функция $B(x)$ — бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с $A(x)$ при $x \to a+0$;

3) если $k < 1$, то функция $B(x)$ — бесконечно большая более низкого порядка по сравнению с $A(x)$ при $x \to a+0$.

§ 8. Монотонные функции. Признак существования предела монотонных функций

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X.

I. Если из неравенства $x' < x''$, где x' и x'' — любые две точки из X, следует неравенство: $f(x') < f(x'')$, то функция $f(x)$ называется *строго возрастающей* на множестве X.

Функцию $f(x)$ называют *неубывающей* или *возрастающей в широком смысле* на множестве X, если из неравенства $x' < x''$, где x' и x'' — любые две точки из X, следует неравенство $f(x') \leq f(x'')$.

II. Если из неравенства $x' < x''$, где x' и x'' — любые две точки из X, следует неравенство $f(x') > f(x'')$, то функция $f(x)$ называется *строго убывающей* на множестве X.

Функцию $f(x)$ называют *невозрастающей* или *убывающей в широком смысле* на множестве X, если из неравенства $x' < x''$, где x' и x'' — любые две точки из X, следует неравенство $f(x') \geq f(x'')$.

Функции всех этих типов носят общее название *монотонных*. Для монотонных функций имеют место теоремы, вполне аналогичные теоремам для монотонных последовательностей.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает, хотя бы в широком смысле, на множестве X. Пусть точка a обладает тем свойством, что в любой левой полуокрестности $u^-(a)$ точки a имеются точки множества X, отличные от a. (Число a может быть конечным и может быть равным $+\infty$; для любого x из множества X: $x < a$.)

1) Если при этом функция $f(x)$ ограничена сверху, т. е. существует число M такое, что $f(x) \le M$ для всех x из X, то при $x \to a-0$ функция $f(x)$ имеет конечный предел.

2) Если функция $f(x)$ сверху не ограничена, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$.

▶ 1) Допустим сначала, что функция $f(x)$ ограничена сверху, т. е. ограничено сверху множество $\{f(x)\}$, $x \in X$. Но тогда, как мы знаем, существует точная верхняя граница множества $\{f(x)\}$, $x \in X$. Пусть $l = \sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$. Ясно, что для всех x из X будет:

$$f(x) \le l. \tag{1}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое сколь угодно малое и рассмотрим число $l - \varepsilon$. Так как $l - \varepsilon < l$, то по свойству супремума на множестве $\{f(x)\}$, $x \in X$, обязательно найдется элемент $f(\tilde{x})$ такой, что будет $f(\tilde{x}) > l - \varepsilon$.

Так как функция $f(x)$ монотонно возрастающая на множестве X, то для всех x из X, удовлетворяющих неравенству $x > \tilde{x}$, будет: $f(x) \ge f(\tilde{x})$ и, следовательно,

$$f(x) > l - \varepsilon. \tag{2}$$

Заметим, что при всех x из X, для которых $x > \tilde{x}$, будут выполняться одновременно оба неравенства (1) и (2), т. е. при $x > \tilde{x}$ будет $l - \varepsilon < f(x) \le l$, а значит, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

α) Положим $\delta = a - \tilde{x}$, если a — число конечное ($\Rightarrow \tilde{x} = a - \delta$). В этом случае для всех x из X, удовлетворяющих неравенству: $a - \delta < x < a$, будет $|f(x) - l| < \varepsilon$, а это означает, что $l = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

β) Положим $\Delta = \tilde{x}$, если $a = +\infty$ (можно считать, что $\tilde{x} = \Delta > 0$). В этом случае для всех x из X, удовлетворяющих неравенству: $x > \Delta$ будет $|f(x) - l| < \varepsilon$, а это означает, что $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Допустим теперь, что функция $f(x)$ сверху не ограничена, т. е. не ограничено сверху множество $\{f(x)\}$, $x \in X$. Это означает, что какое бы большое число $M > 0$ ни взять на множестве $\{f(x)\}$, $x \in X$, обязательно найдется хотя бы один элемент $f(\tilde{x})$ такой, что будет $f(\tilde{x}) > M$. Так как функция $f(x)$ монотонно возрастающая

на множестве X, то при всех x из X, удовлетворяющих неравенству: $x > \tilde{x}$, будет $f(x) > M$.

α) Положим $\delta = a - \tilde{x}$, если a — число конечное ($\Rightarrow \tilde{x} = a - \delta$). В этом случае для всех x из X, удовлетворяющих неравенству: $a - \delta < x < a$, будет $f(x) > M$.

Таким образом, получили: любому, как угодно большому, числу $M > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $a - \delta < x < a$, так сейчас же $f(x) > M$. А это означает, что

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = +\infty .$$

β) Положим $\Delta = \tilde{x}$, если $a = +\infty$ (можно считать, что $\tilde{x} = \Delta > 0$). В этом случае, для всех x из X, удовлетворяющих неравенству: $x > \Delta$, будет $f(x) > M$.

Итак, любому, как угодно большому, числу $M > 0$ отвечает число $\Delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $x > \Delta$, так сейчас же $f(x) > M$. А это означает, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty . \blacktriangleleft$$

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ монотонно убывает, хотя бы в широком смысле, на множестве X. Пусть точка a обладает тем свойством, что в любой полуокрестности $u^{-}(a)$ точки a имеются точки множества X, отличные от a (число a может быть конечным и может быть равным $+\infty$; для любого x из множества X: $x < a$).

1) Если при этом функция $f(x)$ ограничена снизу, т. е. существует число L такое, что $f(x) \geq L$ для всех x из X, то при $x \to a - 0$ функция $f(x)$ имеет конечный предел.

2) Если функция $f(x)$ снизу не ограничена, то

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = -\infty .$$

Предлагается (в качестве упражнения) доказать теорему 2 самим.

§ 9. Общий признак существования конечного предела функции (признак Больцано — Коши)

Станем рассматривать функцию $f(x)$, определенную на некотором множестве $X = \{x\}$ и точку a. Точка a может принадлежать, а может и не принадлежать множеству X, но обладает свойством, что в любой окрестности $u(a)$ точки a имеются точки множества X, отличные от a. Число a может быть конечным, а может быть равным ∞.

I. Обсудим сначала случай, когда a конечное число.

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \to a$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы любому, сколь угодно малому, числу $\varepsilon > 0$ отвечало число $\delta > 0$ такое, что как только $x', x'' \in X$ и $|x' - a| < \delta$, $|x'' - a| < \delta$, так сейчас же $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

▶ *Необходимость.* Дано: функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет конечный предел. Пусть $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (l — конечное число). Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Так как $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$, $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$, так сейчас же $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть x' и x'' — любые, но такие, что $x', x'' \in X$, $x' \neq a$, $x'' \neq a$ и $|x' - a| < \delta$, $|x'' - a| < \delta$. Тогда $|f(x'') - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x') - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Имеем

$$f(x'') - f(x') = (f(x'') - l) + (l - f(x')) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - l| + |f(x') - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: любому, сколь угодно малому, числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $x', x'' \in X$, $x' \neq a$, $x'' \neq a$, $|x' - a| < \delta$, $|x'' - a| < \delta$, так сейчас же $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Требуется доказать, что существует конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Возьмем последовательность значений x: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — любую, но такую, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$ и $x_n \underset{n \to \infty}{\to} a$. Так как $x_n \underset{n \to \infty}{\to} a$, то по числу $\delta > 0$ (найденному по числу $\varepsilon > 0$) можно указать номер N такой, что при всех $n > N$ будет $|x_n - a| < \delta$. В частности, если взять номер $m > N$, то будет $|x_m - a| < \delta$. А значит, $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, если $m > N$ и $n > N$. (Здесь x_m выступает в роли x'', а x_n — в роли x'; см. условие.) Последнее означает, что последовательность $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

имеет конечный предел (по критерию Коши для последовательностей). Итак, показано, что для каждой последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}_{n\in N}$ имеет конечный предел.

Утверждаем, что последовательности $\{f(x_n)\}_{n\in N}$, соответствующие различным последовательностям $\{x_n\}_{n\in N}$, сходящимся к a, имеют своим пределом одно и то же число.

Рассуждаем от противного. Допустим, что для двух различных последовательностей

$$x_1', x_2', \dots, x_n', \dots \tag{1}$$

и

$$x_1'', x_2'', \dots, x_n'', \dots \tag{2}$$

таких, что $x_n' \underset{n\to\infty}{\to} a$ и $x_n'' \underset{n\to\infty}{\to} a$, соответствующие последовательности значений функции $f(x)$:

$$f(x_1'), f(x_2'), \dots, f(x_n'), \dots \tag{3}$$

и

$$f(x_1''), f(x_2''), \dots, f(x_n''), \dots \tag{4}$$

сходятся к различным пределам: $f(x_n') \underset{n\to\infty}{\to} l'$, $f(x_n'') \underset{n\to\infty}{\to} l''$, где $l' \neq l''$.

Тогда, перемежая члены последовательностей (1) и (2), построим новую последовательность:

$$x_1', x_1'', x_2', x_2'', \dots, x_n', x_n'', \dots \tag{5}$$

Последовательность (5), очевидно, сходится к a при $n \to \infty$, ибо при достаточно больших n и x_n', и x_n'' отличаются от a произвольно мало. В то же время соответствующая последовательность значений функции:

$$f(x_1'), f(x_1''), f(x_2'), f(x_2''), \dots, f(x_n'), f(x_n''), \dots \tag{6}$$

не имеет предела, так как последовательности из ее членов, стоящих на четных или нечетных местах, стремятся к различным пределам. Получили противоречие (у нас показано, что для каждой последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции имеет предел). Значит, наше допущение неверно, и, следовательно, последовательности значений функции $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, соответствующие различным последовательностям $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящимся к a, имеют своим пределом одно и то же число. А это означает, что существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. ◀

II. Рассмотрим теперь случай, когда $a=\infty$ (пусть для определенности $a=+\infty$).

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x\to+\infty$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы любому, сколь угодно малому, числу $\varepsilon>0$ отвечало число $\Delta>0$ такое, что как только $x', x''\in X$ и $x'>\Delta$, $x''>\Delta$, так сейчас же

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Доказательство теоремы 2 совершенно аналогично доказательству теоремы 1. Поэтому предлагаем (в качестве упражнения) доказать теорему 2 самостоятельно.

§ 10. Понятие непрерывности функции

Станем рассматривать функцию $y=f(x)$, определенную на некотором множестве $X=\{x\}$, и точку x_0. Точка $x_0\in X$ и обладает свойством: в любой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 имеются точки множества X, отличные от x_0.

Отметим, что так как точка x_0 принадлежит области определения функции, то в этой точке функция имеет определенное значение $f(x_0)$. Дадим определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 следующими равносильными способами.

I. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Так как $x_0=\lim\limits_{x\to x_0} x$, то равенству (1) можно придать такую форму: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, что кратко выражают словами: предел функции равен значению функции от предела аргумента.

II. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если для любой последовательности значений аргумента x: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такой, что $x_n\in X$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, оказывается, что соответствующая последовательность значений функции: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$

сходится к $f(x_0)$. (Обращаем внимание на то факт, что здесь нет запрета: $x_n \neq x_0$.)

III. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если любому, сколь угодно малому, $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. (Здесь нет запрета: $x \neq x_0$.)

Замечание. Пусть $x_0 \in X$ и $x \in X$ и пусть $x = x_0 + \Delta x \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta x = x - x_0$. Величина Δx называется *приращением независимой переменной.* (Отметим, что Δx может быть больше нуля, а может быть и меньше нуля.)

Пусть $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$. Величина

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

называется *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx (отметим, что Δy может быть больше нуля, а может быть и меньше нуля и даже равно нулю).

Предположим теперь, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, или $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Следовательно, можно сказать: функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

Замечание 1. Подобно тому как определялись правосторонний и левосторонний пределы функции $f(x)$ в некоторой точке a, можно определить правостороннюю и левостороннюю непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение. 1) Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

2) Функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Справедливы утверждения:

α) если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 в обычном смысле, то она непрерывна в этой точке одновременно и справа, и слева;

β) если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 одновременно и справа и слева, то она непрерывна в этой точке и в обычном смысле.

Замечание 2. Пусть функция $f(x)$ определена в замкнутом промежутке $[a,b]$. Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$, если она непрерывна в обычном смысле в каждой внутренней точке этого промежутка и если она непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Замечание 3. В дальнейшем будем рассматривать, как правило, функции, для которых областью определения $X=\{x\}$ является промежуток. В этом случае любая точка $x_0 \in X$ обладает свойством: в любой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 имеются точки множества X, отличные от x_0.

§ 11. Некоторые свойства непрерывных функций

1. Теорема (о стабильности знака). Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке X и точка $x_0 \in X$. Если $f(x_0) > 0$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из X, удовлетворяющих неравенству: $|x - x_0| < \delta$, будет: $f(x) > 0$.

▶ Положим $f(x_0) = h$ ($h > 0$ по условию). Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то любому $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon = \frac{h}{2} > 0$) отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В частности,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{h}{2} \Leftrightarrow f(x_0) - \frac{h}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{h}{2},$$

откуда $f(x) > f(x_0) - \frac{h}{2} = h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} > 0$. Таким образом, получено: для $x \in X$ и удовлетворяющих неравенству: $|x - x_0| < \delta$ будет $f(x) > \frac{h}{2} > 0$. ◀

Справедливо также утверждение: если $f(x_0) < 0$ и если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же $f(x) < 0$.

2. Арифметические операции над непрерывными функциями.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке X и непрерывны в точке $x_0 \in X$. Тогда в точке x_0 будут непрерывны также функции:

1) $s(x) = f(x) + g(x)$;
2) $r(x) = f(x) - g(x)$;
3) $p(x) = f(x) \cdot g(x)$;
4) $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (частное при условии: $g(x_0) \neq 0$).

▶ В случае частного $g(x_0) \neq 0$. А тогда по теореме о стабильности знака $g(x) \neq 0$ для $x \in X$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$.

Следовательно, $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ определена для $x \in u_\delta(x_0)$ ($u_\delta(x_0) \subset X$).

Установим, например, непрерывность в точке x_0 функции $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Значит, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ ($f(x_0)$ и $g(x_0)$ — определенные числа).

Но тогда, по теореме о пределе частного двух функций (так как предел знаменателя $g(x_0) \neq 0$), имеем:

$$\lim_{x \to x_0} q(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = q(x_0).$$

А это равенство означает, что функция $q(x)$ непрерывна в точке x_0. ◀

3. Непрерывность сложной функции.

Определение. Пусть функция $z = \varphi(y)$ определена в некотором промежутке $Y = \{y\}$, а функция $y = f(x)$ определена в промежутке $X = \{x\}$ и такая, что, если $x \in X$, то $f(x) \in Y$. Тогда для $x \in X$ имеет смысл выражение $\varphi(f(x))$. Выражение $\varphi(f(x))$ представляет собой функцию аргумента x, определенную в промежутке X.

Эта функция называется *сложной функцией* или *суперпозицией* функций $f(x)$ и $\varphi(y)$.

Замечание. Предположение, что значения функции $f(x)$ не выходят за пределы промежутка Y, в котором определена функция $\varphi(y)$, весьма существенно: если его опустить, то может получиться и нелепость. Например, полагая $z = \ln y$, а $y = \sin x$, мы можем рассматривать лишь такие значения x, для которых $\sin x > 0$, ибо иначе выражение $\ln \sin x$ не имело бы смысла.

Теорема. Суперпозиция непрерывных функций непрерывна, т. е. если функция $y=f(x)$ непрерывна в некоторой точке $x_0 \in X$, а функция $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0 \in Y$ ($y_0=f(x_0)$), то суперпозиция $\varphi(f(x)) = F(x)$ непрерывна в точке x_0.

▶ Возьмем последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ любую, но такую, что $x_n \in X$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. Тогда, в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, будет

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0), \text{ т. е. } y_n \underset{n\to\infty}{\to} y_0$$

(так как $x_n \in X$, то $y_n = f(x_n) \in Y$ при всех n). Так как $y_n \in Y$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y_0$, то, в силу непрерывности функции $\varphi(y)$ в точке y_0, будет:

$$\varphi(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(y_0), \text{ т. е. } \varphi(f(x_n)) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(f(x_0)), \text{ т. е. } F(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} F(x_0).$$

А это и значит, что функция $F(x) = \varphi(f(x))$ непрерывна в точке x_0. ◀

4. Примеры непрерывных функций.

1. $f(x) \equiv C(\text{const})$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Эта функция непрерывна в любой точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

▶ В самом деле, пусть точка x_0 — любая из $(-\infty, +\infty)$. Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ любую, но такую, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. Соответствующая последовательность значений функции будет такой:

$$f(x_1) = C; \; f(x_2) = C; \; \ldots, \; f(x_n) = C; \; \ldots .$$

Значит, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} C = f(x_0)$. А это означает, что $f(x)$ — непрерывна в точке x_0. У нас точка x_0 — любая из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, $f(x)$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$. ◀

2. $f(x) = x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Эта функция непрерывна в любой точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

▶ Выберем и закрепим любую точку x_0 в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Возьмем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ любую, но такую, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. Соответствующая последовательность значений функции будет такой:

$$f(x_1) = x_1,\ f(x_2) = x_2,\ \ ...,\ \ f(x_n) = x_n,\ \ ... .$$

Значит, $f(x_n) = x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 = f(x_0)$. А это означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. У нас точка x_0 — любая из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, $f(x) = x$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$. ◀

3. $f(x) = x^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $n \in \mathrm{N}$ (n — натуральное число).

▶ Эта функция непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$, ибо $f(x) = \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n \text{ сомножителей}}$. Следовательно, $f(x) = x^n$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$ как произведение конечного числа функций, непрерывных в этом промежутке. ◀

4. $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $n \in \mathrm{N}$ ($f(x)$ — целая рациональная функция, полином).

▶ Эта функция непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$ как сумма конечного числа функций, непрерывных в этом промежутке. ◀

5. $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m}$, $n \in \mathrm{N}$ и $m \in \mathrm{N}$ ($f(x)$ — дробная рациональная функция).

▶ Эта функция, как отношение двух непрерывных функций, будет непрерывна в любой такой точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, в которой знаменатель отличен от нуля; т. е. $f(x)$ будет непрерывна в каждой точке области своего существования. ◀

Лемма. Для всех вещественных значений α справедливо неравенство

$$|\sin\alpha| \le |\alpha|. \qquad (*)$$

▶ 1) Если $\alpha = 0$, то соотношение (*) справедливо (это очевидно).

2) Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. При доказательстве соотношения $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ нами было получено неравенство: $\sin\alpha < \alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Так как $\sin\alpha > 0$ и $\alpha > 0$ для $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha = |\sin\alpha|$, $\alpha = |\alpha|$, и потому неравенство $\sin\alpha < \alpha$ может быть записано в виде $|\sin\alpha| < |\alpha|$. Следовательно, соотношение (*) справедливо для значений α, удовлетворяющих условию $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3) Пусть $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$. Имеем в этом случае $|\alpha| = \alpha \geq \frac{\pi}{2} > 1$. Так как всегда $|\sin\alpha| \leq 1$, то получаем: $|\sin\alpha| \leq 1 < |\alpha| \Rightarrow |\sin\alpha| < |\alpha|$. Значит, соотношение (*) справедливо для значений $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.

4) Пусть $\alpha < 0$, т. е. $\alpha \in (-\infty, 0)$. Имеем $|\sin\alpha| = |\sin(-\alpha)|$; $|\alpha| = |-\alpha|$; $-\alpha > 0$, если $\alpha < 0$. В пунктах 2) и 3) было доказано: $|\sin(-\alpha)| < |-\alpha|$, если $\alpha < 0$. Значит, $|\sin\alpha| < |\alpha|$, если $\alpha < 0$.

Показано, следовательно, что соотношение (*) справедливо и для значений $\alpha < 0$. ◀

6. $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Утверждаем, что $f(x) = \sin x$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

▶ Выберем и закрепим любую точку x_0 из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n\in N}$ любую, но такую, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ (а значит, $(x_n - x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0$). Этой последовательности значений аргумента будет соответствовать последовательность значений функции: $\{\sin x_n\}_{n\in N}$. Имеем

$$\sin x_n - \sin x_0 = 2\sin\frac{x_n - x_0}{2}\cos\frac{x_n + x_0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sin x_n - \sin x_0| = 2\cdot\left|\sin\frac{x_n - x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_n + x_0}{2}\right| \leq 2\cdot\frac{|x_n - x_0|}{2}\cdot 1 .$$

Таким образом, получили

$$0 \le |\sin x_n - \sin x_0| \le |x_n - x_0|.$$

У нас $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 \Leftrightarrow (x_n - x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. А тогда, по теореме о "сжатой" переменной, находим, что $(\sin x_n - \sin x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sin x_n \underset{n\to\infty}{\to} \sin x_0$. Так как последнее соотношение справедливо для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к x_0, то заключаем, что $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. А это означает, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в точке x_0. У нас точка x_0 — любая из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$. ◀

7. $f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Утверждаем, что $f(x) = \cos x$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

▶ Известно, что $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x = \sin u$, $u = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = \cos x$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$ как суперпозиция двух непрерывных функций. ◀

8. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

▶ Имеем $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $f(x)$ определена всюду, за исключением точек: $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (в этих точках $\cos x = 0$). Как отношение двух непрерывных функций, $f(x) = \operatorname{tg} x$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$ всюду, за исключением точек $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. $f(x) = \operatorname{tg} x$ непрерывна в каждой точке области своего существования. ◀

9. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

▶ Имеем $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $f(x)$ определена всюду, за исключением точек $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (в этих точках $\sin x = 0$). Как отношение двух непрерывных функций $f(x)=\operatorname{ctg} x$ непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$ всюду, за исключением точек $x=k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т. е. $f(x)=\operatorname{ctg} x$ непрерывна в каждой точке области своего существования. ◀

10. $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $x\in(-\infty, +\infty)$.

Лемма 1. Если $\gamma \geq 0$, то $(1+\gamma)^n \geq 1+n\gamma$ $(n\in\mathbb{N})$.

▶ Имеем

$$(1+\gamma)^n = 1+n\gamma+\underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}\gamma^2+\ldots+\gamma^n}_{\geq 0} \Rightarrow (1+\gamma)^n \geq 1+n\gamma. \blacktriangleleft$$

Лемма 2. Пусть $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность натуральных чисел, любая, но такая, что $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Тогда, если $a>0$, то $\alpha^{\frac{1}{\alpha_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

▶ Обсудим сначала случай, когда $a>1$.

Имеем в этом случае: $a^{\frac{1}{\alpha_n}} = \sqrt[\alpha_n]{a} > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{\alpha_n}} = 1+\gamma_n$, где $\gamma_n>0$.

А тогда $a=(1+\gamma_n)^{\alpha_n}$, откуда, по лемме 1, находим $a>1+\alpha_n\gamma_n$. Следовательно,

$$0<\gamma_n<\frac{a-1}{\alpha_n}. \qquad (1)$$

Но $\dfrac{a-1}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. А тогда по теореме о "сжатой" переменной из (1) получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$. У нас $a^{\frac{1}{\alpha_n}}=1+\gamma_n \Rightarrow a^{\frac{1}{\alpha_n}}-1=\gamma_n \Rightarrow$ $\Rightarrow 1=\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{\alpha_n}}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $0<a<1$.

Имеем в этом случае $\dfrac{1}{a}>1$. А тогда, по доказанному выше, $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Так как $a^{\frac{1}{\alpha_n}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{1/\alpha_n}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{\alpha_n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{1/\alpha_n}} = 1$. ◀

Теорема 1. Если $a > 0$, то $\lim\limits_{h \to 0} a^h = 1$.

▶ Обсудим сначала случай, когда $a > 1$.

Возьмем последовательность $\{h_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ — любую, но такую, что $h_n > 0$ (для любого $n \in \mathrm{N}$) и $h_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Положим $\alpha_n = \mathrm{E}\left(\frac{1}{h_n}\right)$. Ясно, что α_n — целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству:

$$\alpha_n \le \frac{1}{h_n} < \alpha_n + 1 .$$

(Можно считать, что $\alpha_n > 0$, начиная хотя бы с некоторого места, ибо $\frac{1}{h_n} > 1$, начиная, по крайней мере, с некоторого места.) Ясно, далее, что $\alpha_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$. Так как $\alpha_n \le \frac{1}{h_n}$, то $h_n \le \frac{1}{\alpha_n}$ и, следовательно,

$$a^{h_n} \le a^{\frac{1}{\alpha_n}} .$$

Имеем, далее: $a^{h_n} > 1 > \frac{1}{a^{1/\alpha_n}}$. Таким образом, получаем

$$\frac{1}{a^{1/\alpha_n}} < a^{h_n} \le a^{\frac{1}{\alpha_n}} .$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и, приняв во внимание, что $a^{\frac{1}{\alpha_n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$, находим $\lim\limits_{n \to \infty} a^{h_n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{h \to +0} a^h = 1$.

Возьмем теперь последовательность $\{h_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ — любую, но такую, что $h_n < 0$ (для всех $n \in \mathrm{N}$) и $h_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Положим $-h_n = \tilde{h}_n$. Ясно, что $\tilde{h}_n > 0$, для всех $n \in \mathrm{N}$, и $\tilde{h}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Имеем

$$a^{h_n} = a^{-\tilde{h}_n} = \frac{1}{a^{\tilde{h}_n}} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a^{h_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} a^{\tilde{h}_n}} = 1$$

(ибо, по доказанному выше, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\tilde{h}_n} = 1$). Последнее означает, что $\lim\limits_{h\to -0} a^h = 1$.

Так как $\lim\limits_{h\to +0} a^h = \lim\limits_{h\to -0} a^h = 1$, то заключаем, что $\lim\limits_{h\to 0} a^h = 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < a < 1$.

Имеем в этом случае $\dfrac{1}{a} > 1$. А тогда, по доказанному выше, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{a}\right)^h = 1$. Так как $a^h = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^h}$, то $\lim\limits_{h\to 0} a^h = \dfrac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{a}\right)^h} = 1$. ◀

Теорема 2. Функция $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $x \in (-\infty, +\infty)$, непрерывна в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

▶ Возьмем любую точку x_0 из промежутка $(-\infty, +\infty)$ и закрепим ее. Мы докажем, что $f(x) = a^x$ непрерывна в точке x_0, если покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Положим $x - x_0 = h \Rightarrow x = x_0 + h$. Ясно, что $h \to 0$, если $x \to x_0$. Имеем $a^x = a^{x_0+h} = a^{x_0} \cdot a^h$. А тогда

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{h\to 0}(a^{x_0} \cdot a^h) = a^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} a^h = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}.$$

Так как точка x_0 — любая из промежутка $(-\infty, +\infty)$, то заключаем, что $f(x) = a^x$ непрерывна в $(-\infty, +\infty)$. ◀

§ 12. Свойства функций, непрерывных в замкнутом промежутке

1. Первая теорема Больцано — Коши (теорема об обращении функции в нуль). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$. Если значения функции $f(x)$ на концах промежутка $[a,b]$ суть числа разных знаков (т. е. $f(a)\cdot f(b) < 0$), то между точками a и b обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что $f(c) = 0$.

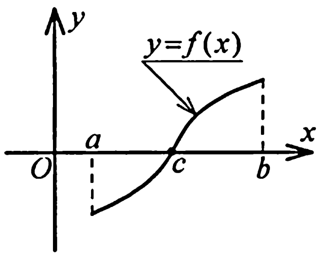


Рис. 3.6

(На рис. 3.6 дано геометрическое пояснение; оно не является доказательством теоремы.)

▶ Пусть для определенности $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Положим $d = \frac{a+b}{2}$ $\left(d = a + \frac{b-a}{2}\right)$. Если окажется, что $f(d) = 0$, то точка d будет искомой.

Пусть же $f(d) \neq 0$. Тогда один и только один из двух промежутков $[a,d]$, $[d,b]$ будет таким, у которого на левом конце функция $f(x)$ принимает отрицательное значение, а на правом — положительное. Обозначим этот промежуток через $[a_1, b_1]$.

Если реализуется случай 1) (см. рис. 3.7), то $a_1 = d$, $b_1 = b$. Если реализуется случай 2) (см. рис. 3.7), то $a_1 = a$, $b_1 = d$. Ясно, что $a \le a_1$, $b_1 \le b$ и что $a_1 < b_1$; $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$; $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

Положим, затем, $d_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Если окажется, что $f(d_1) = 0$, то точка d_1 будет искомой.

Пусть же $f(d_1) \neq 0$. Тогда один и только один из двух промежутков $[a_1, d_1]$, $[d_1, b_1]$ будет таким, у которого на левом конце функция $f(x)$ принимает отрицательное значение, а на правом — положительное. Обозначим этот промежуток через $[a_2, b_2]$. Будем иметь: $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$; $a \le a_1 \le a_2$; $a_2 < b_2$; $b_2 \le b_1 \le b$;

$$b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}.$$

Станем продолжать этот процесс аналогичным образом. Если на каком-нибудь n-ом шаге мы получим точку d_n такую, что

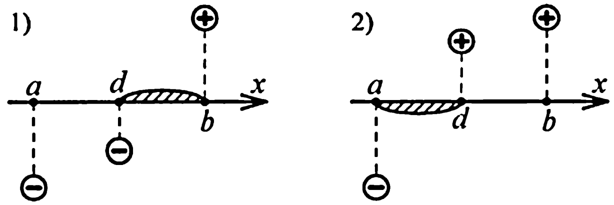


Рис. 3.7

$f(d_n)=0$, то эта точка d_n будет искомой. В противном случае мы получим две бесконечные последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots (a \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots) \qquad (1)$$

и

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots (b \ge b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots), \qquad (2)$$

такие, что при всех $n \in \mathbf{N}$: $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$; $a_n < b_n$; $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Так как $a_n < b_n$, а $b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b$, то при всех $n \in \mathbf{N}$: $a_n < b$. Значит, последовательность (1) монотонно возрастает (по крайней мере, в широком смысле) и ограничена сверху. Следовательно, у последовательности (1) существует конечный предел. Пусть $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. У нас при всех $n \in \mathbf{N}$: $a \le a_n < b$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим: $a \le c \le b$, т. е. $c \in [a,b]$.

Покажем, что последовательность (2) сходится к тому же пределу c.

В самом деле, имеем

$$b_n = a_n + (b_n - a_n) = a_n + \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = c + 0 = c.$$

Итак, показано, что в промежутке $[a,b]$ существует точка c такая, что $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ и $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$. По условию функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$. Значит, в частности, функция $f(x)$ непрерывна в точке c. Но тогда из соотношений $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ следует $f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(c)$ и $f(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(c)$. У нас при всех $n \in \mathbf{N}$:

$$f(a_n) < 0; \quad f(b_n) > 0. \qquad (3)$$

Переходя в неравенствах (3) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$f(c) \le 0 \text{ и } f(c) \ge 0.$$

Совместное осуществление этих двух последних неравенств возможно лишь тогда, когда $f(c)=0$. Было показано, что точка $c \in [a,b]$. Так как по условию $f(a) \ne 0$ и $f(b) \ne 0$, то заключаем, что $c \in (a,b)$, т. е. $a < c < b$. ◀

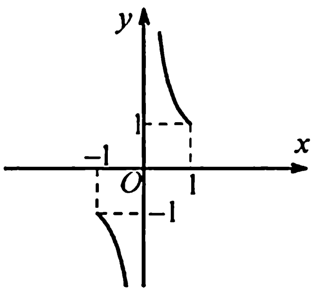


Рис. 3.8

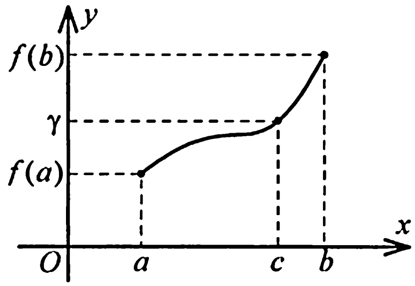


Рис. 3.9. Геометрическое пояснение теоремы о промежуточном значении

Замечание. Требование непрерывности функции $f(x)$ во всех точках промежутка $[a,b]$ существенно. Возьмем, например, функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ и рассмотрим ее в промежутке $[-1,1]$. Хотя эта функция и принимает значения разных знаков на концах промежутка $[-1,1]$, но в нуль в $[-1,1]$ нигде не обращается. (Эта функция не является непрерывной в точке $x=0$.)

2. Вторая теорема Больцано — Коши (теорема о промежуточном значении). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$ и на концах этого промежутка принимает неравные значения (пусть для определенности $f(a)<f(b)$). Тогда, какое бы число γ, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$ ни взять ($f(a)<\gamma<f(b)$), между точками a и b обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что будет

$$f(c)=\gamma.$$

Иначе: непрерывная функция, переходя от одного своего значения к другому принимает и все промежуточные значения.

▶ Введем в рассмотрение вспомогательную функцию: $\varphi(x)=f(x)-\gamma$. Ясно, что функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$. У нас $f(a)<\gamma<f(b)$. Поэтому

$$\varphi(a)=f(a)-\gamma<0,\quad \varphi(b)=f(b)-\gamma>0.$$

Видим, что функция $\varphi(x)$ на концах промежутка $[a,b]$ принимает значения разных знаков. А тогда, по первой теореме Больцано — Коши, между точками a и b обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что $\varphi(c)=0$, т. е. $f(c)-\gamma=0$, или $f(c)=\gamma$. ◀

3. Существование и непрерывность обратной функции.

Определение. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется *обратимой*, если неравным значениям аргумента отвечают неравные же значения функции, т. е. если $x' \neq x''$, то и $f(x') \neq f(x'')$. (Здесь x' и x'' — любые две точки из X).

Пусть функция $y = f(x)$ — обратимая, заданная на множестве X, и пусть Y — множество всех значений этой функции.

Возьмем любое $y_0 \in Y$. Ясно, что на множестве X найдется одно и только одно значение x_0 такое, что $f(x_0) = y_0$. Таким образом, каждому значению y из множества Y отвечает совершенно определенное значение x ($x \in X$ и такое, что $f(x) = y$). Это означает, что x есть функция от y, определенная на множестве Y, т. е. $x = g(y)$, $y \in Y$. Функция $x = g(y)$, определенная на множестве Y, называется обратной функцией для функции $y = f(x)$, определенной на множестве X.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке X. Если из неравенства: $x' < x''$, где x' и x'' — любые две точки из X, следует неравенство: $f(x') < f(x'')$, то функция $f(x)$ называется *строго возрастающей* в промежутке X.

Если же из неравенства: $x' < x''$, где x' и x'' — любые две точки из X, следует неравенство: $f(x') > f(x'')$, то функция $f(x)$ называется *строго убывающей* в промежутке X.

Отметим, что функции строго возрастающие и строго убывающие являются обратимыми.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $[a,b]$ ($a < b$) и является там строго возрастающей и непрерывной. Тогда у функции $y = f(x)$ имеется обратная функция $x = g(y)$, определенная в промежутке $[p,q]$, где $p = f(a)$, $q = f(b)$, причем эта функция строго возрастающая и непрерывная в промежутке $[p,q]$.

▶ Раз функция $y = f(x)$ строго возрастающая в $[a,b]$, то она обратима и потому у нее существует обратная функция $x = g(y)$. Как всегда, эта обратная функция определена на множестве Y, состоящем из всех значений функции $f(x)$.

1. Покажем, что $Y = [p,q]$.

Пусть y_0 — любое, принадлежащее Y ($y_0 \in Y$). Это значит, что y_0 — одно из значений, принимаемых функцией $f(x)$ в промежутке $[a,b]$. Следовательно, в промежутке $[a,b]$ имеется x_0 такое, что $f(x_0) = y_0$.

Так как $a \leq x_0 \leq b$ и так как функция $f(x)$ строго возрастающая, то $f(a) \leq f(x_0) \leq f(b)$, т. е. $p \leq y_0 \leq q$, а значит, $y_0 \in [p,q]$.

Итак, из того, что $y_0 \in Y$, следует: $y_0 \in [p,q]$. Так как y_0 — любой элемент из Y, то заключаем, что

$$Y \subset [p,q]. \qquad (*)$$

Пусть теперь $\tilde{y}$ — любое, принадлежащее $[p,q]$ ($\tilde{y} \in [p,q]$). Покажем, что $\tilde{y} \in Y$. Для этого надо показать, что в промежутке $[a,b]$ обязательно найдется $\tilde{x}$ такое, что $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Если $\tilde{y} = p$ (у нас $p = f(a)$), то таким $\tilde{x}$ является a. Если $\tilde{y} = q$ (у нас $q = f(b)$), то таким $\tilde{x}$ является b. Если же $p < \tilde{y} < q$, то существование требуемого $\tilde{x}$ в промежутке $[a,b]$ вытекает из второй теоремы Больцано — Коши.

Итак, из того, что $\tilde{y} \in [p,q]$, следует, что $\tilde{y} \in Y$. Так как $\tilde{y}$ — любой элемент из $[p,q]$, то это означает, что

$$[p,q] \subset Y. \qquad (**)$$

Из того, что $Y \subset [p,q]$, а $[p,q] \subset Y$ следует, что $Y = [p,q]$.

2. Покажем теперь, что функция $x = g(y)$ строго возрастает в $[p,q]$. Для этого в промежутке $[p,q]$ возьмем y_1 и y_2 — любые, но такие, что $y_1 < y_2$. Положим $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Ясно, что $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ и что $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Так как x_1 и x_2 — вещественные числа, то, по свойству упорядоченности системы **W**, обязательно имеет место одно и только одно из трех соотношений: $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$.

Если бы было: $x_1 = x_2$, то тогда оказалось бы: $f(x_1) = f(x_2)$, т. е. $y_1 = y_2$, а это не так. Значит, соотношение $x_1 = x_2$ исключается. Если бы было: $x_1 > x_2$, то тогда оказалось бы: $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. $y_1 > y_2$, а это не так. Значит, соотношение $x_1 > x_2$ исключается. Так как соотношения $x_1 = x_2$ и $x_1 > x_2$ исключены, то остается только соотношение $x_1 < x_2$, а значит, $g(y_1) < g(y_2)$. Таким образом, получили: из того, что $y_1 < y_2$, где y_1 и y_2 — любые две точки из $[p,q]$, следует, что $g(y_1) < g(y_2)$. А это означает, что функция $x = g(y)$ — строго возрастающая в $[p,q]$.

3. Остается доказать непрерывность функции $x = g(y)$ в $[p,q]$. Возьмем любую точку $y_0 \in [p,q]$ и установим непрерывность функции $x = g(y)$ в этой точке. Тем самым будет установлена непрерывность функции $x = g(y)$ в промежутке $[p,q]$.

Пусть для определенности: $p < y_0 < q$. Положим $g(y_0) = x_0$ ($x_0 \in (a,b)$). Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, но такое, чтобы было: $b - x_0 \ge \varepsilon$ и $x_0 - a \ge \varepsilon$. Положим $x_1 = x_0 - \varepsilon$, $x_2 = x_0 + \varepsilon$. Ясно, что точки x_1 и $x_2 \in [a,b]$ и $x_1 < x_2$. Пусть $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Ясно, что точки y_1 и y_2 принадлежат $[p,q]$ и $y_1 < y_2$ (см. рис. 3.10).

Возьмем y — любое, удовлетворяющее неравенству:

$$y_1 < y < y_2. \qquad (4)$$

Так как функция $g(y)$ — строго возрастающая, то из неравенства (4) вытекает неравенство

$$g(y_1) < g(y) < g(y_2), \qquad (5)$$

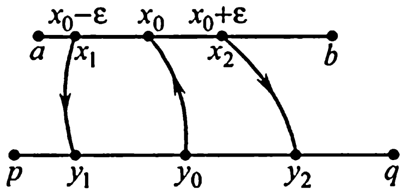


Рис. 3.10

т. е.

$$x_1 < g(y) < x_2 \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(y_0) - \varepsilon < g(y) < g(y_0) + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < g(y) - g(y_0) < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

Подчеркнем еще раз, что неравенство $\Leftrightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ выполняется для всех y, удовлетворяющих неравенству: $y_1 < y < y_2$. Заметив это, положим $\delta = \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1)$. (Ясно, что $\delta > 0$, ибо разности $y_2 - y_0$ и $y_0 - y_1$ положительные). А тогда всякое y, удовлетворяющее условию: $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, будет удовлетворять неравенству (4) и, следовательно, для всякого y, удовлетворяющего условию $|y - y_0| < \delta$, будет:

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

А это означает, что функция $x = g(y)$ непрерывна в точке y_0. ◀

Замечание 1. Аналогичная теорема имеет место для строго убывающих функций. Именно.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $[a,b]$ ($a < b$) и является там строго убывающей и непрерывной. Тогда у функции $y = f(x)$ имеется обратная функция $x = g(y)$, определенная в промежутке $[p,q]$, где $p = f(b)$, $q = f(a)$, причем эта функция строго убывающая и непрерывная в промежутке $[p,q]$.

Замечание 2. Справедливы также следующие **утверждения**.

I. Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке (a,b) ($a < b$) и является там строго возрастающей и непрерывной. Тогда у функции $y = f(x)$ имеется обратная функция $x = g(y)$, определенная в промежутке (p,q), где $p = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $q = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$, причем эта функция строго возрастающая и непрерывная в промежутке (p,q).

II. Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке (a,b) ($a < b$) и является там строго убывающей и непрерывной. Тогда у функции $y=f(x)$ имеется обратная функция $x=g(y)$, определенная в промежутке (p,q), где $p=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, $q=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, причем эта функция строго убывающая и непрерывная в промежутке (p,q).

Заметим, что некоторые из чисел a,b,p,q могут быть несобственными.

4. Непрерывность элементарных функций (продолжение).

1. $y=\arcsin x$.

Рассмотрим функцию $x=\sin y$. Эта функция определена и непрерывна на всей оси, а на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ она еще и строго возрастающая. Значит, рассматривая ее для $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, мы можем применить к ней теорему об обратной функции. По теореме об обратной функции, функция $y=\arcsin x$ будет определена на промежутке $[-1,1]$ и будет строго возрастающей и непрерывной на этом промежутке.

2. $y=\arccos x$.

Рассмотрим функцию $x=\cos y$. Эта функция определена и непрерывна на всей оси, а на промежутке $[0,\pi]$ она еще и строго убывающая. Значит, рассматривая ее для $y\in[0,\pi]$, мы можем применить к ней теорему об обратной функции. По теореме об обратной функции, функция $y=\arccos x$ будет определена на промежутке $[-1,1]$ и будет строго убывающей и непрерывной на этом промежутке.

3. $y=\operatorname{arctg} x$.

Рассмотрим функцию $x=\operatorname{tg} y$. Эта функция определена на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, строго возрастает и непрерывна там. Имеем $\lim\limits_{y\to-\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} y=-\infty$, $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} y=+\infty$. Рассматривая функцию $x=\operatorname{tg} y$ для $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, приходим к выводу, что функция $y=\operatorname{arctg} x$ определена в промежутке $(-\infty,+\infty)$, строго возрастает и непрерывна на этом промежутке.

4. $y = \operatorname{arcctg} x$.

Рассмотрим функцию $x = \operatorname{ctg} y$. Эта функция на промежутке $(0, \pi)$ определена, строго убывает и непрерывна. Имеем $\lim\limits_{y \to +0} \operatorname{ctg} y = +\infty$, $\lim\limits_{y \to \pi - 0} \operatorname{ctg} y = -\infty$. Рассматривая функцию $x = \operatorname{ctg} y$ для $y \in (0, \pi)$, приходим к выводу, что функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена в промежутке $(-\infty, +\infty)$, строго убывает и непрерывна на этом промежутке.

5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной для показательной функции: $x = a^y$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

α) Пусть $a > 1$. В этом случае функция $x = a^y$ — строго возрастающая и непрерывная в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Имеем $\lim\limits_{y \to -\infty} a^y = 0$; $\lim\limits_{y \to +\infty} a^y = +\infty$. Следовательно, если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ определена в промежутке $(0, +\infty)$, строго возрастающая и непрерывная в этом промежутке.

β) Пусть $0 < a < 1$. В этом случае функция $x = a^y$ — строго убывающая и непрерывная в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Имеем $\lim\limits_{y \to -\infty} a^y = +\infty$, $\lim\limits_{y \to +\infty} a^y = 0$. Следовательно, если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ определена в промежутке $(0, +\infty)$, строго убывающая и непрерывная в этом промежутке.

6. Общая степенная функция $y = x^r$, где r — любое вещественное число ($r \in \mathbf{W}$).

В качестве определения общей степенной функции $y = x^r$ при любом вещественном r и $x \in (0, +\infty)$ принимаем выражение: $y = x^r = e^{r \ln x}$, $x \in (0, +\infty)$. Имеем $y = e^u$, где $u = r \ln x$. Видим, что функция $y = x^r$, $x \in (0, +\infty)$, r — любое вещественное число, будет непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$ как суперпозиция непрерывных функций.

В пункте 4°, § 11, и в пункте 4°, § 12, были рассмотрены основные (простейшие) элементарные функции. Было показано, что каждая простейшая элементарная функция непрерывна в каждой точке области своего существования.

Введем понятие **класса элементарных функций.**

К *классу элементарных функций* относят прежде всего основные (простейшие) элементарные функции, а также все функции, получающиеся из основных с помощью первых четырех арифметических действий и операций суперпозиций, последовательно примененных конечное число раз.

Было установлено выше (см. пункт 2°, § 11), что любая арифметическая операция над непрерывными функциями приводит к функции, непрерывной в каждой точке области ее существования. Было установлено также (см. пункт 3°, § 11), что суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная. Поэтому можно сделать общий вывод

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области своего существования.

5. Три важных предела.

1. Предел функции $\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$.

Установим, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$.

▶ Имеем $\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha) = \ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\alpha \to 0$. Так как логарифмическая функция есть функция непрерывная, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \ln\left[\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \ln e = 1$. Следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1. \blacktriangleleft$$

2. Предел функции $\dfrac{a^\alpha - 1}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$.

Установим, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a$.

▶ Положим $a^\alpha - 1 = \beta \Rightarrow a^\alpha = 1 + \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha\ln a = \ln(1+\beta). \qquad (6)$$

Заметим, что $\beta \to 0$, если $\alpha \to 0$ (ибо $\lim\limits_{\alpha\to 0} a^\alpha = 1$). Из равенства (6) находим $\alpha = \dfrac{\ln(1+\beta)}{\ln a}$. Имеем

$$\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta\cdot\ln a}{\ln(1+\beta)}=\ln a\cdot\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\alpha\to 0$. Будем иметь

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln a\cdot\lim_{\substack{\alpha\to 0\\(\beta\to 0)}}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}=\ln a\cdot 1=\ln a. \blacktriangleleft$$

3. Предел функции $\dfrac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}$ при $\alpha\to 0$.

Установим, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu$.

▶ Положим $(1+\alpha)^{\mu}-1=\beta \Rightarrow (1+\alpha)^{\mu}=1+\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu\ln(1+\alpha)=\ln(1+\beta). \tag{7}$$

Заметим, что $\beta\to 0$, если $\alpha\to 0$ (ибо $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\mu}=1$). Имеем

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\mu\ln(1+\alpha)}{\ln(1+\beta)}=\mu\cdot\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\alpha\to 0$ (а, следовательно, и $\beta\to 0$). Получим

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu\cdot\underbrace{\lim_{\substack{\alpha\to 0\\(\beta\to 0)}}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}}_{=1}=\mu. \blacktriangleleft$$

6. Степенно-показательные выражения.

Это выражения вида

$$[u(x)]^{v(x)}. \tag{*}$$

Здесь $u(x)$ и $v(x)$ — функции от x, определенные на множестве X. Предполагаем, что для всех x из множества X: $u(x)>0$. Пусть требуется найти предел выражения $[u(x)]^{v(x)}$ при $x\to x_0$. Считаем, что точка x_0 обладает тем свойством, что в любой δ-окрестности точки x_0 имеются точки множества X, отличные от x_0. Представим выражение (*) в виде

$$[u(x)]^{v(x)}=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}.$$

Пусть существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a$, причем $a > 0$ (значит, существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \ln u(x) = \ln a$; здесь использована непрерывность логарифмической функции). Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} v(x)\cdot \ln u(x) = b\ln a.$$

А тогда, в силу непрерывности показательной функции, получаем

$$\lim_{x\to x_0} [u(x)]^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\cdot\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[v(x)\cdot\ln u(x)]} = e^{b\ln a} = a^b.$$

Заметим, что предел выражения $[u(x)]^{v(x)}$ при $x \to x_0$ можно установить не только в случае, рассмотренном выше, но и во всех случаях, когда удается найти конечный или бесконечный предел c произведения $v(x)\cdot\ln u(x)$, когда оно представляет неопределенность вида $\infty\cdot 0$ при $x \to x_0$:

1) если c — конечное число, то $\lim\limits_{x\to x_0} [u(x)]^{v(x)} = e^c$;

2) если $c = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} [u(x)]^{v(x)} = 0$;

3) если $c = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} [u(x)]^{v(x)} = +\infty$.

Случаи, когда произведение $v(x)\cdot\ln u(x)$ представляет при $x \to x_0$ неопределенность вида $\infty\cdot 0$, отвечают следующим комбинациям:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \pm\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0$.

В этих случаях говорят, что выражение $[u(x)]^{v(x)}$ при $x \to x_0$ представляет соответственно неопределенности вида: $1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Для решения вопроса о пределе выражения $[u(x)]^{v(x)}$ при $x \to x_0$ здесь мало знать лишь пределы функций $u(x)$ и $v(x)$ при $x \to x_0$, а нужно непосредственно учитывать законы, по которым они стремятся к своим пределам при $x \to x_0$.

Приведем несколько примеров для раскрытия этих новых видов неопределенностей.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; $\left[1^\infty\right]$.

▶ Имеем $\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)}$. Станем искать

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right);\ [\infty\cdot 0].$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)\right]}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{3}{2}x\cdot\frac{x}{2}}{x^2\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{3/2}$. ◀

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$; $\left[1^\infty\right]$.

▶ Имеем $\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e^{x\cdot\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}$. Станем искать $\lim\limits_{x\to\infty} x\times$ $\times\ln\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$; $[\infty\cdot 0]$. Положим $\dfrac{1}{x}=t \Rightarrow t\to 0$, если $x\to\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln\,[1+(\sin t + \cos t - 1)]}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t + \cos t - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2} - 2\sin^2\frac{t}{2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t}\cdot\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) = 1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x = e$. ◀

7. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности функции). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$, то она ограничена, т. е. существуют числа m и M такие, что $m \le f(x) \le M$ для $x \in [a,b]$.

▶ Предположим противное, а именно, допустим, что $f(x)$ не является ограниченной в промежутке $[a,b]$. Но тогда не может оказаться, чтобы для всех $x \in [a,b]$ было бы: $|f(x)| \le 1$. Поэтому в промежутке $[a,b]$ обязательно найдется хотя бы одно $x = x_1$ такое, что будет:

$$|f(x_1)| > 1.$$

Точно также не может оказаться, чтобы для всех $x \in [a,b]$ было бы: $|f(x)| \le 2$. Поэтому в промежутке $[a,b]$ обязательно найдется хотя бы одно $x = x_2$ такое, что будет:

$$|f(x_2)| > 2,$$

и т. д.

Продолжая этот процесс, мы придем к последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{8}$$

такой, что при каждом $n \in \mathrm{N}$: $x_n \in [a,b]$ и $|f(x_n)| > n$. Но тогда

$$|f(x_n)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{9}$$

У нас последовательность (8) — ограниченная, ибо при любом $n \in \mathrm{N}$:

$$a \le x_n \le b. \tag{10}$$

Следовательно, по принципу выбора Больцано — Вейерштрасса, из последовательности (8) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу. Пусть это будет $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ и пусть $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Из неравенства (10) заключаем, что при любом $k \in \mathbf{N}$:

$$a \le x_{n_k} \le b .$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$a \le x_0 \le b \text{, т. е. } x_0 \in [a,b].$$

По условию функция $f(x)$ непрерывна в $[a,b]$. Значит, в частности, $f(x)$ непрерывна в точке x_0. А тогда из того, что $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, следует:

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x_{n_k})| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |f(x_0)|. \tag{11}$$

($|f(x_0)|$ — определенное число).

С другой стороны, последовательность $\{|f(x_{n_k})|\}_{k\in\mathbf{N}}$ является подпоследовательностью для последовательности $\{|f(x_n)|\}_{n\in\mathbf{N}}$. Из этого факта и из (9) вытекает, что должно быть

$$|f(x_{n_k})| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{12}$$

Сопоставляя соотношения (11) и (12), видим, что получено противоречие. Это противоречие и доказывает теорему. ◀

Замечание. Требование непрерывности функции $f(x)$ в замкнутом промежутке $[a,b]$ существенно. Если функция $f(x)$ непрерывна лишь в открытом промежутке (a,b) или в полуоткрытом промежутке $(a,b]$ (или $[a,b)$), то нельзя гарантировать ограниченность $f(x)$ в этих промежутках.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Она непрерывна в промежутке $(0, 1]$. В каждой конкретной точке этого промежутка она принимает конечное значение, но $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не ограничена, ибо при приближении x к 0 может принимать сколь угодно большие значения.

8. Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$, то она достигает в этом промежутке как своего наибольшего, так и своего наименьшего значений.

▶ По первой теореме Вейерштрасса множество значений, которые принимает функция $f(x)$ на $[a,b]$, является ограниченным. Мы знаем, что для всякого непустого числового множества, ограниченного и сверху, и снизу, существуют точная верхняя и точная нижняя границы.

Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$, $m = \inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$ (M и m — конечные числа). Мы установим, что функция $f(x)$ достигает в промежутке $[a,b]$, например, своего наибольшего значения, если покажем, что в промежутке $[a,b]$ имеется хотя бы одна точка x_0 такая, что $f(x_0) = M$. Рассуждаем от противного. Допустим, что такой точки x_0 в промежутке $[a,b]$ нет. Но тогда при всех x из промежутка $[a,b]$ будет:

$$M - f(x) > 0.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a,b]$ как отношение двух непрерывных функций с не обращающимся в нуль знаменателем. Отметим еще, что $\varphi(x)$ — положительная в $[a,b]$.

К функции $\varphi(x)$ применима первая теорема Вейерштрасса. Это позволяет утверждать, что существует число $K > 0$ такое, что при всех x из $[a,b]$ будет:

$$\varphi(x) \le K \ \text{ или } \ \frac{1}{M - f(x)} \le K \ \Rightarrow \ M - f(x) \ge \frac{1}{K} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f(x) \le M - \frac{1}{K}, \text{ для всех } x \in [a,b]. \tag{13}$$

Так как неравенство (13) выполняется для всех $x \in [a,b]$, то заключаем, что число $M - \frac{1}{K}$ есть верхняя граница множества $\{f(x)\}$, $x \in [a,b]$. А это невозможно, ибо у нас $M = \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$ и, следовательно, любое число, меньшее, чем M не является верхней границей множества $\{f(x)\}$, $x \in [a,b]$. Полученное противоречие доказывает, что на промежутке $[a,b]$ обязательно имеется хотя бы одна точка x_0, в которой функция $f(x)$ принимает свое наибольшее значение.

Совершенно аналогично устанавливается, что функция $f(x)$ принимает в промежутке $[a,b]$ свое наименьшее значение. ◀

§ 13. Понятие равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке X (промежуток X может быть замкнутым или нет, конечным или бесконечным). Пусть точка $x_0 \in X$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ или ("на языке $\varepsilon - \delta$"): любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке X, т. е. непрерывна в каждой точке x_0 этого промежутка. Тогда для каждой точки x_0 из X в отдельности по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$, так сейчас же $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует отметить, что при изменении положения точки x_0 в промежутке X (при неизменном числе $\varepsilon > 0$) число $\delta > 0$ будет, вообще говоря, меняться. Из рис. 3.11 видим, что число δ, пригодное на участке, где функция изменяется медленно (график функции представляет пологую кривую) может оказаться слишком большим для участка быстрого изменения функции (где график круто поднимается или опускается).

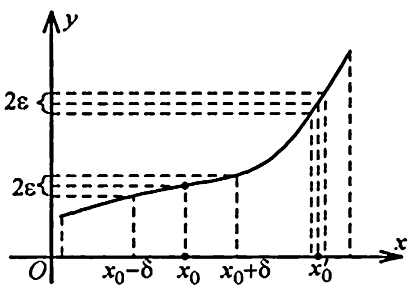


Рис. 3.11

Видим, таким образом, что число $\delta > 0$ выбирается по числу $\varepsilon > 0$, и для каждой точки $x_0 \in X$ оно будет своим, т. е. δ зависит и от ε, и от положения точки x_0 на промежутке X.

По отношению к функции $f(x)$, непрерывной в промежутке X, возникает вопрос: нельзя ли для каждого, заданного заранее, числа $\varepsilon > 0$ указывать число $\delta > 0$ такое, которое годилось бы для любого положения точки x_0 на промежутке X.

Ответ: не всегда. Убедимся в этом на примере.

Пусть $f(x) = \cos\frac{1}{x}$. Станем рассматривать эту функцию на промежутке $X = (0, 1]$. Заметим, что функция $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $(0, 1]$.

Возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$) и покажем, что по этому $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ нельзя найти $\delta > 0$ такое, которое

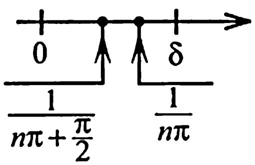


Рис. 3.11

годилось бы для любого положения точки x_0 на промежутке $(0, 1]$. Рассуждаем от противного. Допустим, что такое $\delta > 0$ есть. Возьмем натуральное число n ($n \in N$) столь большим, чтобы было: $\frac{1}{n\pi} < \delta$. Но тогда и подавно: $\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} < \delta$. Положим $x = \frac{1}{n\pi}$; $x_0 = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Ясно, что

$|x - x_0| = \left|\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right| < \delta$. Однако

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|(-1)^n - 0\right| = 1\,(> \frac{1}{2} = \varepsilon).$$

В случае, когда для любого, сколь угодно малого, числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что неравенство: $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, где бы в пределах рассматриваемого промежутка X ни лежали точки x_0 и x, функцию $f(x)$ называют *равномерно непрерывной* на промежутке X.

В этом случае число $\delta > 0$ оказывается зависящим только от ε, т. е. $\delta > 0$ годится для любого положения точки x_0 на промежутке X.

Определение равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке X можно сформулировать и следующим образом.

Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на промежутке X, если любому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек x' и x'' из промежутка X, для которых: $|x'' - x'| < \delta$, оказывается: $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

(Важно подчеркнуть еще раз, что здесь x' и x'' — любые две точки из промежутка X, отстоящие друг от друга на расстоянии, меньшем, чем δ и что δ зависит только от ε.)

Для случая, когда промежуток X является замкнутым промежутком $[a,b]$ имеет место следующая теорема.

Теорема Кантора. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна в этом промежутке.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ не равномерно. Это означает, что не всякому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности. Следовательно, имеется хотя бы одно $\varepsilon_0 > 0$, которому не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности.

Возьмем $\delta_1 = 1 (> 0)$. Не может оказаться, чтобы для всех пар точек x' и x'' из $[a,b]$, для которых $|x'' - x'| < \delta_1$, было бы $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon_0$. (В противном случае $\delta_1 = 1$ отвечало бы ε_0 в смысле определения равномерной непрерывности; у нас же $\varepsilon_0 > 0$ не отвечает никакое $\delta > 0$.) Следовательно, в промежутке $[a,b]$ обязательно найдется хотя бы одна пара точек x_1' и x_1'', такая, что хотя $|x_1'' - x_1'| < \delta_1$, однако

$$|f(x_1'') - f(x_1')| \geq \varepsilon_0.$$

Возьмем $\delta_2 = \frac{1}{2} (> 0)$. Не может оказаться, чтобы для всех пар точек x' и x'' из $[a,b]$, для которых $|x'' - x'| < \delta_2$, было бы $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon_0$. (В противном случае $\delta_2 = \frac{1}{2}$ отвечало бы ε_0 в смысле определения равномерной непрерывности.) Следовательно, в промежутке $[a,b]$ обязательно найдется хотя бы одна пара точек x_2' и x_2'' такая, что хотя $|x_2'' - x_2'| < \delta_2$, однако

$$\left|f(x_2'')-f(x_2')\right|\geq\varepsilon_0,$$

и т. д.

Возьмем $\delta_n=\dfrac{1}{n}$ $(>0;\ n\in N)$. Не может оказаться, чтобы для всех пар точек x' и x'' из $[a,b]$, для которых $|x''-x'|<\delta_n$, было бы $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon_0$. (В противном случае $\delta_n=\dfrac{1}{n}$ отвечало бы ε_0 в смысле определения равномерной непрерывности.) Следовательно, в промежутке $[a,b]$ обязательно найдется хотя бы одна пара точек x_n', x_n'' такая, что хотя $|x_n''-x_n'|<\delta_n$, однако

$$\left|f(x_n'')-f(x_n')\right|\geq\varepsilon_0,$$

и т. д.

Таким образом, у нас выстраиваются две последовательности:

$$x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots, \tag{1}$$

$$x_1'', x_2'', \ldots, x_n'', \ldots, \tag{2}$$

обладающие свойствами: при всех $n\in N$ $x_n'\in[a,b]$, $x_n''\in[a,b]$, $|x_n''-x_n'|<\dfrac{1}{n}$, $\left|f(x_n'')-f(x_n')\right|\geq\varepsilon_0$.

Из того, что $|x_n''-x_n'|<\dfrac{1}{n}$, т. е. $-\dfrac{1}{n}<(x_n''-x_n')<\dfrac{1}{n}$ при всех $n\in N$, следует, что

$$(x_n''-x_n')\underset{n\to\infty}{\to}0. \tag{3}$$

Из того, что $x_n'\in[a,b]$, $x_n''\in[a,b]$, т. е. $a\leq x_n'\leq b$, $a\leq x_n''\leq b$ при всех $n\in N$, следует, что последовательности (1) и (2) — ограниченные.

Так как последовательность (1) ограниченная, то по принципу выбора Больцано — Вейерштрасса из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}'\}_{k\in\mathrm{N}}$, имеющую конечный предел. Пусть

$$x_{n_k}'\underset{k\to\infty}{\to}x_0. \tag{4}$$

Заметим, что $x_0\in[a,b]$, ибо при всех $k\in N$: $a\leq x_{n_k}'\leq b$. Из последовательности (2) выделим подпоследовательность:

$$\left\{x''_{n_k}\right\}_{k\in\mathbf{N}}. \qquad (5)$$

Подпоследовательность (5) выделяем из последовательности (2) не по принципу выбора Больцано — Вейерштрасса, а так, чтобы индексы подпоследовательности $\left\{x''_{n_k}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ соответствовали индексам подпоследовательности $\left\{x'_{n_k}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$. Ясно, что тогда

$$(x''_{n_k} - x'_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\to} 0. \qquad (6)$$

Имеем $x''_{n_k} = x'_{n_k} + (x''_{n_k} - x'_{n_k})$, откуда, принимая во внимание (4) и (6), находим

$$\lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x'_{n_k} + \lim_{k\to\infty}(x''_{n_k} - x'_{n_k}) = x_0.$$

По условию функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,b]$. Было отмечено, что точка $x_0 \in [a,b]$. Значит, $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Следовательно,

из того, что $x'_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$, следует, что $f(x'_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\to} f(x_0)$;

из того, что $x''_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$, следует, что $f(x''_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\to} f(x_0)$,

а значит, $f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Последнее означает, что любому $\varepsilon > 0$, в частности, $\varepsilon_0 > 0$, отвечает номер K такой, что $\left|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| < \varepsilon_0$ при всех $k > K$. Но у нас при всех $n \in \mathbf{N}$: $\left|f(x''_n) - f(x'_n)\right| \ge \varepsilon_0$, следовательно, в частности, при всех $k \in \mathbf{N}$: $\left|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| \ge \varepsilon_0$. Видим, что получили противоречие.

К этому противоречию мы пришли, предположив, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на промежутке $[a,b]$. Значит, $f(x)$ — равномерно непрерывная на промежутке $[a,b]$. ◀

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a,b]$ и является там ограниченной, т. е. ограниченным является множество $\{f(x)\}$, $x \in [a,b]$. Но тогда существуют $\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\} = M$ и $\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\} = m$.

Разность $\omega = M - m$ называется *колебанием* функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$.

Отметим, что если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то колебание ω есть разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$.

Разобьем промежуток $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частей. Получим частичные промежутки $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Пусть λ — наибольшая из длин частичных промежутков, т. е. $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \{(x_{k+1} - x_k)\}$. λ называется *рангом дробления* промежутка $[a,b]$.

Следствие из теоремы Кантора. Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$, то любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любого способа разбиения промежутка $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, у которого ранг дробления $\lambda < \delta$, будет $\omega_k < \varepsilon$ одновременно для всех $k = \overline{0, n-1}$. (Здесь ω_k — колебание функции $f(x)$ в промежутке $[x_k, x_{k+1}]$).

▶ По условию $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$. А тогда по теореме Кантора функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$. Следовательно, любому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек x' и x'' из $[a,b]$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, будет: $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ — разбиение промежутка $[a,b]$ на части $[x_k, x_{k+1}]$ — любое, но такое, что $\lambda < \delta$. Рассмотрим произвольный частичный промежуток $[x_k, x_{k+1}]$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$, то она достигает в этом промежутке своих наибольшего M_k и наименьшего m_k значений. Пусть $M_k = f(\tilde{\tilde{x}}_k)$, $m_k = f(\tilde{x}_k)$, где точки $\tilde{x}_k$ и $\tilde{\tilde{x}}_k$ принадлежат $[x_k, x_{k+1}]$. Имеем $|\tilde{\tilde{x}}_k - \tilde{x}_k| \le x_{k+1} - x_k \le \lambda < \delta$. А потому $0 \le f(\tilde{\tilde{x}}_k) - f(\tilde{x}_k) < \varepsilon$, т. е. $M_k - m_k < \varepsilon$, или $\omega_k < \varepsilon$ для всех $k = \overline{0, n-1}$. ◀

Примеры и задачи к § 13.

Задача 1. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из промежутков $[a,c]$ и $[c,b]$ $(a < c < b)$, то она равномерно непрерывна на суммарном промежутке $[a,b]$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое, число. По условию, $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,c]$. Это означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta_1 > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек x' и x'' из $[a,c]$, для которых $|x'' - x'| < \delta_1$, будет $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

По условию $f(x)$ равномерно непрерывна на $[c,b]$. Это означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta_2 > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек x' и x'' из $[c,b]$, для которых $|x'' - x'| < \delta_2$, будет $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любых двух точек x' и x'' из промежутка $[a,c]$ и для любых двух точек x' и x'' из промежутка $[c,b]$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, будут выполняться неравенства

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $x' \in [a,c]$, $x'' \in [c,b]$ — любые, но такие, что $|x'' - x'| < \delta$. Ясно, что тогда $|x' - c| < \delta$ и $|x'' - c| < \delta$ (и подавно). Следовательно,

$$|f(x'') - f(x')| = |(f(x'') - f(c)) + (f(c) - f(x'))| \leq$$

$$\leq |f(x'') - f(c)| + |f(x') - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, получили: любому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек x' и x'' из промежутка $[a,b]$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, оказывается

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

А это означает, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $[a,b]$. ◀

Задача 2. Для нижеследующих функций $f(x)$, заданных на соответствующих промежутках X, по числу $\varepsilon > 0$ — любому, найти число

$\delta > 0$ (какое-нибудь, зависящее только от ε), удовлетворяющее условиям равномерной непрерывности для функций $f(x)$ на данных промежутках.

1. $f(x) = 5x - 3$, $X = (-\infty, +\infty)$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $(-\infty, +\infty)$, удовлетворяющие условию: $|x'' - x'| < \delta$. Тогда

$$|f(x'') - f(x')| = |(5x'' - 3) - (5x' - 3)| = 5\,|x'' - x'|.$$

Если брать число $\delta > 0$, удовлетворяющим условию: $\delta \le \frac{\varepsilon}{5}$, то будет: $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ (отметим, что $\delta = \delta(\varepsilon)$). ◀

2. $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $X = [-2, 5]$.

▶ Возьмем число $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $[-2, 5]$ такие, что $|x'' - x'| < \delta$. Тогда

$$|f(x'') - f(x')| = \left|(x''^2 - 2x'' - 1) - (x'^2 - 2x' - 1)\right| =$$

$$= \left|\left((x'')^2 - (x')^2\right) - 2(x'' - x')\right| = |x'' - x'| \cdot \underbrace{|x'' + x' - 2|}_{\le 8} \le 8\,|x'' - x'|.$$

Если брать число $\delta > 0$ удовлетворяющим условию: $\delta \le \frac{\varepsilon}{8}$, то будем иметь: $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$). ◀

3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $X = [0.1, 1]$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $[0.1, 1]$, такие, что $|x'' - x'| < \delta$. Тогда

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right| = \frac{|x'' - x'|}{x' \cdot x''} \le \frac{|x'' - x'|}{0.01} = 100 \cdot |x'' - x'|.$$

Если брать число $\delta > 0$ удовлетворяющим условию: $\delta \le \frac{\varepsilon}{100}$, то будем иметь $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$). ◀

4. $f(x)=\sqrt{x}$, $X=[0,+\infty)$.

▶ Возьмем $\varepsilon>0$ — любое, сколь угодно малое. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $[0,+\infty)$ такие, что $|x''-x'|<\delta$. Положим $x''-x'=h$ ($h>0$; предполагаем, что $x'<x''$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow x''=x'+h$. Тогда

$$|f(x'')-f(x')|=\sqrt{x'+h}-\sqrt{x'}=\frac{h}{\sqrt{x'+h}+\sqrt{x'}}\le\frac{h}{\sqrt{h}}=\sqrt{h}.$$

У нас $|x''-x'|=h$; $|x''-x'|<\delta \Leftrightarrow h<\delta$. Если брать $\delta>0$ удовлетворяющим условию: $\delta\le\varepsilon^2$, то будем иметь $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$ ($\delta=\delta(\varepsilon)$). ◀

5. $f(x)=2\sin x-\cos x$, $X=(-\infty,+\infty)$.

▶ Возьмем $\varepsilon>0$ — любое, сколь угодно малое. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $(-\infty,+\infty)$ такие, что $|x''-x'|<\delta$. Тогда

$$|f(x'')-f(x')|=|(2\sin x''-\cos x'')-(2\sin x'-\cos x')|=$$

$$=|2(\sin x''-\sin x')-(\cos x''-\cos x')|=$$

$$=\left|4\sin\frac{x''-x'}{2}\cdot\cos\frac{x''+x'}{2}+2\sin\frac{x''+x'}{2}\cdot\sin\frac{x''-x'}{2}\right|=$$

$$=2\left|\sin\frac{x''-x'}{2}\right|\cdot\underbrace{\left|2\cos\frac{x''+x'}{2}+\sin\frac{x''+x'}{2}\right|}_{\le 3}\le$$

$$\le 6\left|\sin\frac{x''-x'}{2}\right|\le 6\frac{|x''-x'|}{2}=3|x''-x'| \quad .$$

Если брать число $\delta>0$ удовлетворяющим условию $\delta\le\frac{\varepsilon}{3}$, то будем иметь $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$ ($\delta=\delta(\varepsilon)$). ◀

6. $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0;\\ 0, & x=0;\end{cases}$ $X=[0,\pi]$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое (будем считать $\varepsilon < \pi$). Разобьем промежуток $[0, \pi]$ на два промежутка $\left[0, \frac{\varepsilon}{6}\right]$ и $\left[\frac{\varepsilon}{6}, \pi\right]$.

1) Рассмотрим сначала промежуток $\left[0, \frac{\varepsilon}{6}\right]$. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $\left[0, \frac{\varepsilon}{6}\right]$. Тогда $|x'' - x'| \le \frac{\varepsilon}{6}$. Если ни одна из точек x' и x'' не равна 0, то имеем

$$|f(x'') - f(x')| = \left|x'' \sin\frac{1}{x''} - x' \sin\frac{1}{x'}\right| \le$$

$$\le x'' \cdot \left|\sin\frac{1}{x''}\right| + x' \cdot \left|\sin\frac{1}{x'}\right| \le x'' + x' \le \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если же одна из точек x' и x'' равна 0 (пусть, для определенности, $x' = 0$), то имеем

$$|f(x'') - f(x')| = \left|x'' \sin\frac{1}{x''} - 0\right| = x''\left|\sin\frac{1}{x''}\right| \le x'' \le \frac{\varepsilon}{6} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Видим, что на промежутке $\left[0, \frac{\varepsilon}{6}\right]$ в качестве $\delta_1 > 0$ можно взять $\delta_1 \le \frac{\varepsilon}{6}$.

2) Рассмотрим теперь промежуток $\left[\frac{\varepsilon}{6}, \pi\right]$. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $\left[\frac{\varepsilon}{6}, \pi\right]$ такие, что $|x'' - x'| < \delta_2$. Имеем

$$|f(x'') - f(x')| = \left|x'' \cdot \sin\frac{1}{x''} - x' \cdot \sin\frac{1}{x'}\right| =$$

$$= \left|x'' \cdot \sin\frac{1}{x''} - x'' \cdot \sin\frac{1}{x'} + x'' \cdot \sin\frac{1}{x'} - x' \cdot \sin\frac{1}{x'}\right| \le$$

$$\leq x'' \cdot \left|\sin\frac{1}{x''} - \sin\frac{1}{x'}\right| + |x'' - x'| \cdot \left|\sin\frac{1}{x'}\right| \leq$$

$$\leq |x'' - x'| + x'' \cdot 2\left|\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right) \cdot \cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x''} + \frac{1}{x'}\right)\right| \leq$$

$$\leq |x'' - x'| + 2x''\left|\sin\frac{x' - x''}{2x'x''}\right| \leq |x'' - x'| + 2x'' \cdot \frac{|x'' - x'|}{2x'x''} =$$

$$= |x'' - x'|\left(1 + \frac{1}{x'}\right) \leq |x'' - x'|\left(1 + \frac{6}{\varepsilon}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

если брать $\delta_2 \leq \dfrac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{6}{\varepsilon}} = \dfrac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon + 6)}$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любых двух точек x' и x'' из промежутка $\left[0, \frac{\varepsilon}{6}\right]$ и для любых двух точек x' и x'' из промежутка $\left[\frac{\varepsilon}{6}, \pi\right]$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, будут выполняться неравенства $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $x' \in \left[0, \frac{\varepsilon}{6}\right]$, $x'' \in \left[\frac{\varepsilon}{6}, \pi\right]$ — любые, но такие, что $|x'' - x'| < \delta$. Ясно, что тогда $\left|x' - \frac{\varepsilon}{6}\right| < \delta$ и $\left|x'' - \frac{\varepsilon}{6}\right| < \delta$. Следовательно,

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\left(f(x'') - f\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)\right) + \left(f\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) - f(x')\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|f(x'') - f\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)\right| + \left|f(x') - f\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, получили: любому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек x' и x'' из промежутка $[0, \pi]$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, оказывается

$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. А это означает, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на промежутке $[0, \pi]$. ◀

Задача 3. Показать, что нижеследующие функции, определенные и непрерывные на заданных промежутках X, не являются равномерно непрерывными на этих промежутках.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $X = (0, 1)$.

▶ Установить, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на промежутке X, означает: показать, что не всякому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности, т. е. что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого числа $\delta > 0$ обязательно найдется пара точек x' и x'' из X такая, что, хотя $|x'' - x'| < \delta$, однако $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon_0$.

Возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} (> 0)$. Нужно показать, что взятому $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности.

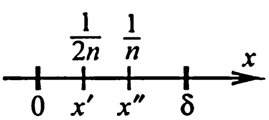


Рис. 3.12

Рассуждаем от противного. Допустим, что такое $\delta > 0$ есть. Каким бы малым ни было это $\delta > 0$, всегда можно найти $n \in \mathrm{N}$ такое, что будет: $\dfrac{1}{n} < \delta$. Но тогда и подавно $\dfrac{1}{2n} < \delta$. Положим $x' = \dfrac{1}{2n}$, $x'' = \dfrac{1}{n}$. Ясно, что $|x'' - x'| = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} < \delta$. Имеем $|f(x'') - f(x')| = |n - 2n| = n > \varepsilon_0$ ($n \in \mathrm{N}$, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$). ◀

2. $f(x) = \ln x$, $X = (0, 1)$.

▶ Возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} (> 0)$ и покажем, что ему не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности.

Рассуждаем от противного. Допустим, что такое $\delta > 0$ есть. Но каким бы малым ни было это $\delta > 0$, всегда можно найти $n \in \mathrm{N}$ такое, что будет: $\dfrac{1}{e^n} < \delta$. Но тогда и подавно $\dfrac{1}{e^{2n}} < \delta$. Положим $x' = \dfrac{1}{e^{2n}}$, $x'' = \dfrac{1}{e^n}$. Ясно, что $|x'' - x'| = \dfrac{e^n - 1}{e^{2n}} < \dfrac{1}{e^n} < \delta$. Имеем

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\ln\frac{1}{e^n} - \ln\frac{1}{e^{2n}}\right| = 2n - n = n > \varepsilon_0 \quad (n \in \mathrm{N},\ \varepsilon_0 = \frac{1}{2}). \blacktriangleleft$$

3. $f(x) = e^x \cos\frac{1}{x}$, $X = (0, 1)$.

▶ Возьмем $\varepsilon_0 = 1 (> 0)$ и покажем, что ему не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности.

Рассуждаем от противного. Допустим, что такое $\delta > 0$ есть. Но каким бы малым ни было это $\delta > 0$, всегда можно найти $n \in \mathrm{N}$ такое, что будет $\frac{1}{2n\pi} < \delta$.

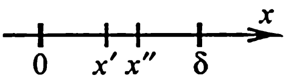


Рис. 3.13

Но тогда и подавно $\frac{1}{(2n+1)\pi} < \delta$. Положим $x' = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, $x'' = \frac{1}{2n\pi}$.

Ясно, что $|x'' - x'| < \delta$. Имеем

$$|f(x'') - f(x')| = \left|e^{\frac{1}{2n\pi}} \cos 2n\pi - e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}} \cos (2n+1)\pi\right| =$$

$$= \left|e^{\frac{1}{2n\pi}} + e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}\right| > 2 > \varepsilon_0 (n \in \mathrm{N}, \varepsilon_0 = 1). \blacktriangleleft$$

4. $f(x) = \sin x^2$, $X = (-\infty, +\infty)$.

▶ Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} (> 0)$ и покажем, что ему не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности.

Рассуждаем от противного. Допустим, что такое $\delta > 0$ есть. Положим $x_n' = \sqrt{n\pi}$; $x_n'' = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathrm{N}$. Имеем

$$|x_n'' - x_n'| = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{n\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{n\pi}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Следовательно, по числу $\delta > 0$ (каким бы малым оно ни было) можно указать номер N такой, что при $n > N$ будет

$\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{n\pi}} < \delta$, т. е. $|x_n'' - x_n'| < \delta$, если $n > N$. Имеем, далее,

$$|f(x_n'') - f(x_n')| = \left|\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \sin n\pi\right| = 1 > \varepsilon_0$$

($n \in \mathrm{N}$ и $n > N$; $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$). ◀

5. $f(x) = x\sin x$, $x = [0, +\infty)$.

▶ Возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\ (> 0)$ и покажем, что ему не отвечает никакое $\delta > 0$ в смысле определения равномерной непрерывности.

Рассуждаем от противного. Допустим, что такое $\delta > 0$ есть. Но каким бы малым ни было это $\delta > 0$, всегда можно найти $N_1 \in \mathrm{N}$ такое, что будет $\frac{1}{n} < \delta$, если $n > N_1$. Положим $x_n' = n\pi$, $x_n'' = n\pi + \frac{1}{n}$. Имеем

$$|x_n'' - x_n'| = \left|\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) - n\pi\right| = \frac{1}{n} < \delta, \text{ если } n > N_1.$$

Имеем, далее,

$$|f(x_n'') - f(x_n')| = \left|\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) - n\pi\sin n\pi\right| =$$
$$= \left|\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\cos n\pi \cdot \sin\frac{1}{n}\right| = \left|\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}\right| =$$
$$= n\pi \cdot \sin\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi.$$

Следовательно, обязательно найдется номер N_2 такой, что при $n > N_2$ будет $|f(x_n'') - f(x_n')| > 1$.

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будем иметь:

$$|x_n'' - x_n'| < \delta, \text{ а } |f(x_n'') - f(x_n')| > 1 > \varepsilon_0 (\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2}). \blacktriangleleft$$

Задача 4. Показать, что нижеследующие функции, определенные и непрерывные на заданных промежутках X, являются равномерно непрерывными на этих промежутках.

1. $f(x) = x + \sin x$, $X = (-\infty, +\infty)$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $(-\infty, +\infty)$ такие, что $|x'' - x'| < \delta$. Тогда

$$|f(x'') - f(x')| = |(x'' + \sin x'') - (x' + \sin x')| =$$
$$= |(x'' - x') + (\sin x'' - \sin x')| =$$
$$= \left|(x'' - x') + 2\sin\frac{x'' - x'}{2}\cos\frac{x'' + x'}{2}\right| \le$$
$$\le |x'' - x'| + 2\frac{|x'' - x'|}{2} = 2|x'' - x'|.$$

Если брать число $\delta > 0$ удовлетворяющим условию $\delta \le \frac{\varepsilon}{2}$, то будем иметь для любых x' и x'' из промежутка $(-\infty, +\infty)$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. А это означает, что $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$. ◀

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $X = [1, +\infty)$.

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. Пусть x' и x'' — любые две точки из промежутка $[1, +\infty)$ такие, что $|x'' - x'| < \delta$. Имеем

$$|f(x'') - f(x')| = \left|\sqrt{x''} - \sqrt{x'}\right| = \left|\frac{x'' - x'}{\sqrt{x''} + \sqrt{x'}}\right| < |x'' - x'|.$$

Положим $\delta = \varepsilon$. Тогда, если $|x'' - x'| < \delta$, то $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. А это означает, что $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $[1, +\infty)$. ◀

§ 14. Точки разрыва функций и их классификация

Мы знаем, что функция $f(x)$, определенная в точке x_0 и некоторой окрестности $u(x_0)$ этой точки, называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Если же в точке x_0 это двойное равенство не выполняется, то точку x_0 называют *точкой разрыва* функции $f(x)$. *Точками разрыва* будем называть также точки, в которых $f(x)$ не определена, но в любой δ-окрестности которых имеются точки области определения функции $f(x)$.

Могут реализоваться следующие случаи.

1°. Существуют конечные

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0),$$

но $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$. В этом случае точку x_0 называют *точкой разрыва первого рода*. Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называют *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Эта функция определена всюду, за исключением точки $x_0 = 0$. Отметим, что в любой δ-окрестности точки $x_0 = 0$ имеются точки области существования функции $f(x)$. Значит, точка x_0 есть точка разрыва функции $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Имеем

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}; \ \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Видим, что $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$ существуют, конечные и что $\lim\limits_{x\to -0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to +0} f(x)$. Значит, точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва первого рода функции $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. $f(+0) - f(-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ — величина скачка функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

2°. В точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ или в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ бесконечен. В этом случае точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода*.

1) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2-x}$. Эта функция определена всюду, за исключением точки $x_0 = 2$. Отметим, что в любой δ-окрестности точки $x_0 = 2$ имеются точки области существова-

ния функции $f(x)$. Значит, точка $x_0 = 2$ есть точка разрыва функции $f(x)$. Имеем

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{1}{2-x} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{2-x} = -\infty.$$

Вывод: точка $x_0 = 2$ есть точка разрыва второго рода функции $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$. Эта функция определена всюду, за исключением точки $x_0 = 1$. Отметим, что в любой δ-окрестности точки $x_0 = 1$ имеются точки области существования функции $f(x)$. Значит, точка $x_0 = 1$ есть точка разрыва функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$. Имеем

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0;\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

Вывод: точка $x_0 = 1$ есть точка разрыва второго рода функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

3) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Эта функция определена всюду, за исключением точки $x_0 = 0$. В любой δ-окрестности точки $x_0 = 0$ имеются точки области существования функции $f(x)$. Значит, точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Имеем: $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} \sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

Вывод: точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва второго рода функции $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.

3°. Существуют конечные $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причем $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но в точке x_0 функция $f(x)$

или не определена, или ее частное значение $f(x_0)$ не равно общему значению односторонних пределов. В этом случае точку x_0 называют *точкой устранимого разрыва*.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Эта функция определена всюду, за исключением точки $x_0=0$. В любой δ-окрестности точки $x_0=0$ имеются точки области существования функции $f(x)$. Значит, точка $x_0=0$ есть точка разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Имеем

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1;\ \lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Видим, что $f(-0)=f(+0)=1$ ($f(0)$ не существует).

Вывод: точка $x_0=0$ есть точка устранимого разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 разрыв указанного типа, то этот разрыв можно устранить. Для этого нужно доопределить функцию $f(x)$ в точке x_0, приняв за значение функции в точке x_0 ее предельное значение в этой точке. Так, если в рассмотренном примере положить $f(0)=1$, то $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0} f(x)=f(0)$, и функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x_0=0$.

Глава 4

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Производная. Механический и геометрический смысл производной

1. Определение производной. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0. Дадим значению аргумента x_0 приращение Δx любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $x_0+\Delta x \in u(x_0)$. Тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ и станем искать предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если существует конечный или бесконечный, но определенного знака, предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ или, что то же самое, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется *производной* от функции $y=f(x)$ по переменной x в точке x_0.

Для обозначения производной употребляются символы

$$f'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\ \left.y'\right|_{x=x_0}.$$

Если предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ конечен, то производная называется *конечной*, если он бесконечен, то производная называется *бесконечной*. Процесс нахождения производной от функции $y=f(x)$ называют *дифференцированием* этой функции; точку x_0, в которой вычисляется производная, называют *точкой дифференцирования.*

2°. Механическое истолкование производной (задача о скорости движущейся точки). Пусть материальная точка M движется по прямой. Пусть за время t от начала движения точка M прошла путь, величина которого равна s. Ясно, что s является функцией времени t: $s=f(t)$.

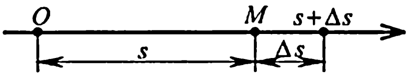


Рис. 4.1

Поставим себе задачу: найти скорость точки M в данный момент времени t.

Для этого перейдем от момента t к моменту $t+\Delta t$. За промежуток времени от t до $t+\Delta t$ точка M пройдет путь $\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$. Средняя скорость $v_{ср}$ за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ будет равна: $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Если рассматриваемое движение точки M не является равномерным, то $v_{ср}$ будет изменяться при изменении величины Δt. При этом чем меньше будет промежуток времени Δt, тем лучше $v_{ср}$ будет характеризовать движение точки M в момент t. Исходя из этого, скоростью v точки M в момент t будем называть предел, к которому стремится средняя скорость $v_{ср}$, когда $\Delta t \to 0$. Таким образом, скорость точки M в момент t определяется равенством $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{ср}$ или

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

Итак, производная от функции, описывающей закон движения точки M, определяет мгновенную скорость этой точки.

3. Геометрическое истолкование производной (задача о проведении касательной к кривой). Пусть имеется кривая (L), и пусть точка $M_0 \in (L)$.

Определение. *Касательной* к кривой (L) в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, проходящей через точку M_0 и некоторую другую точку M, лежащую на кривой (L), когда точка M вдоль кривой произвольным образом стремится к совпадению с точкой M_0.

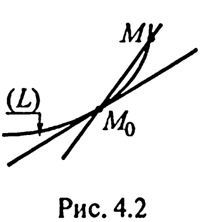


Рис. 4.2

Пусть кривая (L) является графиком функции $y=f(x)$, $x \in (a,b)$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a,b)$. Пусть $y_0 = f(x_0)$, $M_0 = (x_0, y_0)$. Дадим x_0 приращение Δx — любое, но такое, что

$\Delta x \neq 0$ и точка $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$, и отметим на кривой (L) точку $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ($\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$).

Проведем секущую M_0M (рис. 4.3). Она имеет уравнение

$$y - y_0 = k(\Delta x) \cdot (x - x_0), \tag{1}$$

где

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \; (= \operatorname{tg} \beta). \tag{2}$$

Заметим, что равенство (2) справедливо при любом расположении кривой (L) и при любом положении точки M относительно точки M_0 (справа или слева от точки M_0). Отметим, что при $\Delta x \to 0$ расстояние $|M_0M|$ от точки M_0 до точки M стремится к нулю.

В самом деле, в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 будет: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А тогда $|M_0M| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и, следовательно, точка M по кривой будет стремиться к совпадению с точкой M_0; секущая M_0M будет стремиться принять свое предельное положение M_0T; $\operatorname{tg}\beta \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \operatorname{tg}\alpha$. У нас, по определению, предельное положение секущей при $M \to M_0$ называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0. Заметим, что в силу равенства (2) существование конечного предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ означает существование конечной производной $f'(x_0)$. Следовательно, если у функции $f(x)$ в точке x_0 существует конечная производная, то уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ будет иметь вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

((3) получаем из (1), переходя в (1) к пределу при $\Delta x \to 0$).

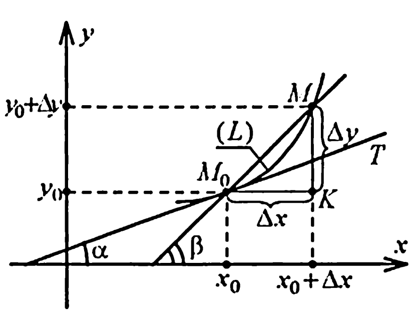


Рис. 4.3

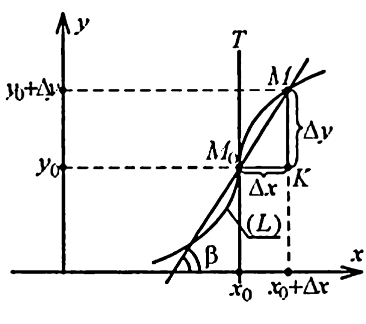


Рис. 4.4

Из аналитической геометрии известно, что коэффициент $f'(x_0)$ в уравнении (3) равен тангенсу угла, который прямая, определяемая уравнением (3), образует с положительным направлением оси Ox:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha .$$

Значит, производная функции $f(x)$ в некоторой точке равна тангенсу угла между касательной в соответствующей точке графика функции $y=f(x)$ и осью абсцисс.

Если у функции $f(x)$ в точке x_0 существует бесконечная производная, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, то в силу равенства (2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}k(\Delta x)=\infty$.

А тогда, записав уравнение (1) секущей M_0M в виде

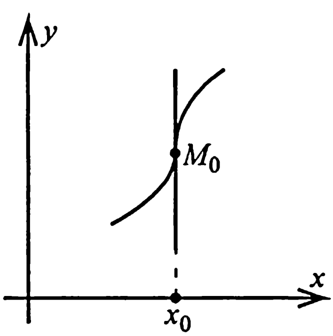
$$\frac{y-y_0}{k(\Delta x)} = x - x_0$$

и перейдя в этом соотношении к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$x - x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0 . \qquad (4)$$

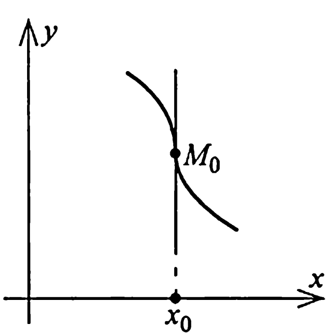
(4) — уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 в случае, когда $f'(x_0)=\infty$. (Прямая $x=x_0$ носит название *вертикальной касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0.)

Замечание. Подчеркнем еще раз, что когда мы говорим, что функция $f(x)$имеет в точке x_0 бесконечную производную, то мы имеем в виду бесконечность определенного знака. График функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 в этом случае имеет вид, схематически изображенный на рис. 4.5 и 4.6.



$f'(x_0)=+\infty$

Рис. 4.5



$f'(x_0)=-\infty$

Рис. 4.6

4. Односторонние производные.

I. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой правосторонней окрестности $u^+(x_0)$ этой точки. В этом случае для вычисления предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ приходится ограничиться приближением Δx к нулю лишь справа ($\Delta x \to +0$; Δx стремится к нулю, оставаясь больше нуля).

Если существует конечный или бесконечный (определенного знака) предел $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется соответственно конечной или бесконечной *правосторонней производной* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$.

II. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой левосторонней окрестности $u^-(x_0)$ этой точки. В этом случае при вычислении предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ приходится ограничиться приближением Δx к нулю лишь слева ($\Delta x \to -0$; Δx стремится к нулю, оставаясь меньше нуля).

Если существует конечный или бесконечный (определенного знака) предел $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то этот предел называется соответственно конечной или бесконечной *левосторонней производной* функции $f(x)$в точке x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$.

Замечание. Об односторонних производных функции $y=f(x)$ в точке x_0 можно говорить и в случае, когда эта функция определена в точке x_0 и в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 (т. е. $f(x)$ определена одновременно и в $u_+(x_0)$ и в $u_-(x_0)$).

Для функции $y=f(x)$, определенной в $u(x_0)$, справедливы **утверждения:**

1) Если у функции $f(x)$ в точке x_0 существует конечная или бесконечная (определенного знака) обычная (т. е. двусторонняя) производная $f'(x_0)$, то у этой функции в точке x_0 существуют одновременно $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, причем $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)(=f'(x_0))$.

2) Если у функции $f(x)$в точке x_0 существуют одновременно конечные или бесконечные (определенного знака) $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ и если $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$, то у этой функции в точке x_0 существует соответственно конечная или бесконечная (определенного знака) обычная (т. е. двусторонняя) производная $f'(x_0)$, равная общему значению односторонних производных.

Отметим, что бывают случаи, когда у функции $y=f(x)$ в точке x_0 существуют одновременно $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, но $f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$. В этих случаях обычной (т. е. двусторонней) производной у функции $y=f(x)$ в точке x_0 нет.

В качестве примера рассмотрим функцию $y=f(x)=|x|$. Найдем правостороннюю и левостороннюю производные этой функции в точке $x_0=0$. Имеем

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|.$$

Если $\Delta x>0$, то $\Delta y=\Delta x$ и, следовательно,

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Если $\Delta x<0$, то $\Delta y=|\Delta x|=-\Delta x$ и, следовательно,

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\left(-\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)=-1.$$

Видим, что $f'_+(0)\neq f'_-(0)$. Значит, производная функции $y=f(x)=|x|$ в точке $x_0=0$ в обычном смысле (т. е. двусторонняя) не существует.

В качестве еще одного примера рассмотрим функцию $y=f(x)=x^{2/3}$. Найдем правостороннюю и левостороннюю производные этой функции в точке $x_0=0$. Имеем

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=$$
$$=f(0+\Delta x)-f(0)=(0+\Delta x)^{2/3}-0=(\Delta x)^{2/3}.$$

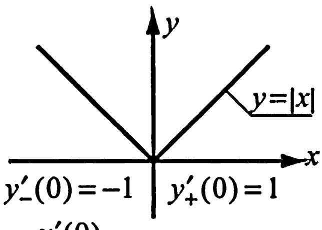


Рис. 4.7

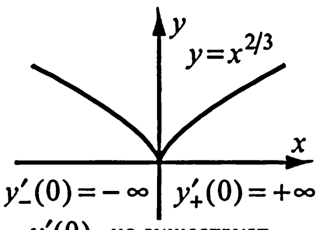


Рис. 4.8

Следовательно,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}} = +\infty\,;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}} = -\infty\,.$$

Видим, что и в этом примере $f'_+(0) \neq f'_-(0)$. Значит, у функции $y = x^{2/3}$ в точке $x_0 = 0$ не существует обычной (т. е. двусторонней) производной.

Графики функций $y = |x|$ и $y = x^{2/3}$ имеют вид, схематически изображенный на рис. 4.7 и 4.8 соответственно.

§ 2. Понятие дифференцируемости функции

1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке X, и пусть точка $x_0 \in X$. Дадим значению x_0 аргумента приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $x_0 + \Delta x \in X$. Пусть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, т. е. Δy есть приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение Δy этой функции в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x\,, \tag{1}$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, а α — функция аргумента Δx такая, что $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Заметим, что функция $\alpha(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ может принимать любое значение (при этом в точке x_0 представление (1) остается справедливым). Ради определенности можно положить, например, $\alpha(0) = 0$. (Тогда частное значение функции $\alpha(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ будет совпадать с ее предельным значением в этой точке.)

Теорема. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Необходимость. Дано: функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Требуется доказать, что существует конечная производная $f'(x_0)$.

▶ По условию функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Но тогда приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Предположив, что $\Delta x \neq 0$ и поделив обе части последнего равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, находим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$.

А это означает, что $f'(x_0)$ существует конечная, причем $f'(x_0) = A$. ◀

Достаточность. Дано: функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$. Требуется доказать, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

▶ По условию $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует конечная. Но тогда, как мы знаем, разность $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ есть бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Значит, если положить $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Имеем, следовательно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, откуда $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, причем $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Видим, что полученное представление Δy совпадает с представлением (1), если обозначить через A не зависящее от Δx число $f'(x_0)$. Тем самым доказано, что функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0. ◀

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что дифференцируемость функции $y=f(x)$ в точке x_0 равносильна существованию в этой точке конечной производной $f'(x_0)$.

2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функции. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.

▶ Так как функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение Δy в этой точке представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A — постоянное число, не зависящее от Δx, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Из последнего равенства следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т. е. что бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое приращение функции. А это означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. ◀

Замечание. Доказанная теорема необратима: из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 не вытекает дифференцируемость этой функции в точке x_0. Существуют функции, непрерывные в некоторой точке, но не являющиеся в этой точке дифференцируемыми. Примером такой функции может служить функция $y = |x|$. Эта функция непрерывна в точке $x_0 = 0$, но она не является дифференцируемой в этой точке, ибо у нее в точке $x_0 = 0$ не существует производная (это показано в предыдущем § 1).

§ 3. Формулы и правила вычисления производных

1. Пусть $y = f(x) \equiv C(\text{const})$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

▶ Выберем и закрепим любое x из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Дадим этому фиксированному x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$. Тогда $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т. е. $y' = 0$ для любого x из $(-\infty, +\infty)$.

Таким образом, $(C)' = 0$, т. е. производная постоянной величины равна нулю (точка дифференцирования — любая). ◀

2. $y = f(x) = x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

▶ Выберем и закрепим любое x из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Дадим этому фиксированному x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$. Тогда $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, т. е. $y' = 1$ для любого x из промежутка $(-\infty, +\infty)$.

Таким образом, $(x)' = 1$, т. е. производная независимой переменной равна единице (точка дифференцирования — любая). ◀

3. $y = f(x) = x^r$, где r — любое вещественное число.

Область определения D_f степенной функции зависит от r. При целом r получается рациональная функция. При r дробном мы имеем здесь радикал. Например, пусть m — натуральное число и $y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$; эта функция определена для всех значений x, если m — нечетное и лишь для неотрицательных значений x — при m четном (в этом случае мы имеем ввиду арифметическое значение радикала). Наконец, если r — иррациональное число, мы будем предполагать $x > 0$ ($x = 0$ допускается лишь при $r > 0$).

▶ В области определения функции D_f берем любое значение $x \neq 0$ и закрепляем. Дадим этому фиксированному x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $(x + \Delta x) \in D_f$. Тогда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^r - x^r = x^r \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^r - 1 \right];$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^r \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^r - 1}{\Delta x}.$$

Так как $\frac{\Delta x}{x}$ — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$, то $\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^r - 1 \sim r \cdot \frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^r \cdot \frac{r \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = r x^{r-1}.$$

Таким образом, $(x^r)' = r x^{r-1}$, $x \in D_f$ и $x \neq 0$. ◀

Замечание. Если точка $x = 0$ принадлежит D_f, то значение $y'(0)$ легко получить непосредственно.

Частные случаи.

1) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

2) $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $x \in [0, +\infty)$;

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in (0, +\infty);\ y'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{(\Delta x)^{1/2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$$

4. $y = f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

▶ Возьмем любое x из промежутка $(-\infty, +\infty)$ и закрепим. Дадим этому фиксированному x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$. Тогда

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

5. $y = f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Совершенно аналогично предыдущему устанавливается, что $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

6. $y = f(x) = a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

▶ Возьмем любое x из промежутка $(-\infty, +\infty)$ и закрепим. Дадим этому фиксированному x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$. Тогда $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. Так как $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \cdot \ln a$ при $\Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$. Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Частный случай. $(e^x)' = e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

7. Простейшие правила вычисления производных.

I. Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ определены в некотором промежутке X и в точке $x \in X$ имеют конечные производные $u'(x)$,

$v'(x)$. Тогда функция $y(x) = u(x) \pm v(x)$ в указанной точке x также имеет конечную производную, причем

$$y'(x) = [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$$

▶ Дадим x, отмеченному в условиях утверждения I, приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $(x + \Delta x) \in X$. Тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ получат соответственно приращения Δu и Δv, и их новыми значениями будут: $u(x) + \Delta u$ и $v(x) + \Delta v$ ($\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$; $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$). Следовательно,

$$\Delta y = [(u(x) + \Delta u) \pm (v(x) + \Delta v)] - [u(x) \pm v(x)] = \Delta u \pm \Delta v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

По условию, существуют конечные $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$, равные соответственно $u'(x)$, $v'(x)$. А тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$ существует конечный, причем

$$y'(x) = u'(x) \pm v'(x). \blacktriangleleft$$

Замечание. Полученный результат может быть легко распространен на любое конечное число слагаемых.

II. Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ определены в некотором промежутке X и в точке $x \in X$ имеют конечные производные $u'(x)$, $v'(x)$. Тогда функция $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ в указанной точке x также имеет конечную производную, причем

$$y'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

▶ Дадим x, отмеченному в условиях утверждения II, приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $(x + \Delta x) \in X$. Тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ получат соответственно приращения Δu и Δv, и их новыми значениями будут $u(x) + \Delta u$ и $v(x) + \Delta v$. А значит,

$$\Delta y = [u(x) + \Delta u] \cdot [v(x) + \Delta v] - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= v(x) \cdot \Delta u + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

По условию существуют конечные $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$, равные соответственно $u'(x)$, $v'(x)$. Кроме того, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$, ибо функция $v(x)$ дифференцируема в точке x, а, следовательно, непрерывна в этой точке (значит, бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции). А тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x). \blacktriangleleft$$

Замечание. Если $y(x) = u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$, причем $u'(x)$, $v'(x)$, $w'(x)$ существуют конечные, то

$$y'(x) = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x).$$

И вообще, если $y(x) = u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)\cdot\ldots\cdot s(x)$, причем $u'(x)$, $v'(x)$, $w'(x)$, ..., $s'(x)$ существуют конечные (и число сомножителей — конечное число), то

$$y'(x) = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)\cdot\ldots\cdot s(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)\cdot\ldots\cdot s(x) +$$
$$+ u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)\cdot\ldots\cdot s(x) + \ldots + u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)\cdot\ldots\cdot s'(x).$$

(Это соотношение устанавливается методом математической индукции).

III. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены в некотором промежутке X и в точке $x_0 \in X$ имеют конечные производные $u'(x_0)$ и $v'(x_0)$. Пусть $v(x) \neq 0$ в этой точке x_0. Тогда функция $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ в указанной точке x_0 также имеет конечную производную, причем

$$y'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

$\blacktriangleright$ По условию существует конечная $v'(x_0)$ в точке $x_0 \in X$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow v(x)$ — непрерывная в точке x_0. По условию $v(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ по теореме о стабильности знака существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $V(x_0) \subset X$ и $v(x) \neq 0$, $x \in V(x_0)$. Дадим x_0, отмеченному в условиях утверждения III, приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $(x_0 + \Delta x) \in V(x_0)$. Тогда функции $u(x)$ и $v(x)$

получат соответственно приращения Δu и Δv, и их новыми значениями будут $u(x)+\Delta u$ и $v(x)+\Delta v$. А значит,

$$\Delta y=\frac{u(x_0)+\Delta u}{v(x_0)+\Delta v}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=\frac{v(x_0)\cdot\Delta u-u(x_0)\cdot\Delta v}{v(x_0)\left[v(x_0)+\Delta v\right]}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v(x_0)\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x_0)\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)\left[v(x_0)+\Delta v\right]}.$$

Заметим, что по условию:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x_0);\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x_0);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}v(x_0)\left[v(x_0)+\Delta v\right]=v^2(x_0)\neq 0\ .$$

А тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v(x_0)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x_0)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x_0)\left[v(x_0)+\Delta v\right]}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x_0)=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.\ ◀$$

8. $y=f(x)=\ln x,\ x\in(0,\ +\infty)$.

▶ Берем любое x из промежутка $(0,\ +\infty)$ и закрепляем. Дадим этому фиксированному x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x\neq 0$ и точка $(x+\Delta x)\in(0,\ +\infty)$. Тогда

$$\Delta y=\ln\,(x+\Delta x)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Так как $\dfrac{\Delta x}{x}$ — бесконечно малая величина при $\Delta x\to 0$, то

$\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\sim\dfrac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x\to 0$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}$.

Таким образом, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,\ +\infty)$. ◀

9. $y = f(x) = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

▶ Имеем

$$a^y = x \Rightarrow y \ln a = \ln x \Rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty).$$ ◀

10. $y = f(x) = \operatorname{tg} x$; $f(x)$ определена всюду, за исключением точек $x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

▶ Имеем $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Следовательно, для $x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, если $x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. ◀

11. $y = f(x) = \operatorname{ctg} x$; $f(x)$ определена всюду, за исключением точек $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

▶ Имеем $y = \frac{\cos x}{\sin x}$. Следовательно, для $x \neq \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким образом, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, если $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. ◀

12. Формула для приращения функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X и пусть x_0 — некоторая точка из X, в которой существует конечная производная

$f'(x_0)$. Дадим x_0 приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $x_0 + \Delta x \in X$. Положим

$$\alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0). \qquad (*)$$

Ясно, что α зависит от Δx (т. е. $\alpha = \alpha(\Delta x)$) и что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right] = 0.$$

Из соотношения (*) находим

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha] \cdot \Delta x,$$

или

$$\Delta y = [f'(x_0) + \alpha] \cdot \Delta x. \qquad (**)$$

Формула (**) и есть *формула для приращения функции.*

Замечание. Формула (**) установлена для $\Delta x \neq 0$, ибо она выведена из (*), а соотношение (*) теряет смысл при $\Delta x = 0$. Если мы сами любым образом доопределим функцию $\alpha(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ (например, положим $\alpha(0) = 13$ или $\alpha(0) = 7$ и т. д.), то формула (**) окажется верной и для $\Delta x = 0$. Условимся раз и навсегда полагать $\alpha(0) = 0$. Тогда формула (**) будет верной как для $\Delta x \neq 0$, так и для $\Delta x = 0$ и соотношение $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$ будет верно независимо от того, по какому закону $\Delta x \to 0$ (хотя бы Δx и принимало значение нуль).

13. Правило дифференцирования сложной функции.

Пусть функция $z = f(y)$ определена в промежутке $Y = \{y\}$, а функция $y = \varphi(x)$ определена в промежутке X и такая, что если $x \in X$, то $\varphi(x) \in Y$. Тогда для $x \in X$ имеет смысл выражение $F(x) = f(\varphi(x))$ ($F(x) = f(\varphi(x))$, $x \in X$ — сложная функция). Предположим, что в точке $x_0 \in X$ существует конечная производная $\varphi'(x_0)$, а в точке y_0 ($y_0 = \varphi(x_0) \in Y$) существует конечная производная $f'(y_0)$. Покажем, что существует конечная $F'(x_0)$ и найдем ее.

Дадим x_0 приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и $x_0 + \Delta x \in X$. Тогда функция $y = \varphi(x)$ получит приращение $\Delta y = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$ (не исключено, что $\Delta y = 0$). Так как $z = f(y)$, то приращению Δy отвечает приращение $\Delta z = f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)$.

По формуле приращения функции (**) (см. пункт 12)

$$\Delta z = [f'(y_0) + \alpha(\Delta y)] \cdot \Delta y,$$

где $\alpha(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. А тогда

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = [f'(y_0) + \alpha(\Delta y)] \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Но тогда $\Delta y \to 0$ (ибо функция $y = \varphi(x)$ дифференцируемая в точке x_0, а значит и непрерывная в точке x_0). А, следовательно, и $\alpha(\Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Значит,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(y_0) + \alpha(\Delta y)] \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0),$$

т. е. $F'(x_0) = f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0)$. Показано, таким образом, что $F'(x_0)$ существует конечная и что $F'(x_0) = f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0)$ (короче: $z'_x = z'_y \cdot y'_x$).

Правило цепочки. Производная сложной функции по независимой переменной равна ее производной по промежуточной переменной, умноженной на производную промежуточной переменной по независимой переменной. (Здесь y — промежуточная переменная).

Примеры.

1) $z = \sin \ln x \Rightarrow z = \sin y$, где $y = \ln x$.

Имеем $z'_x = z'_y \cdot y'_x = \cos y \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cos \ln x$.

2) $z = e^{x^3} \Rightarrow z = e^y$, где $y = x^3$.

Имеем $z'_x = z'_y \cdot y'_x = e^y \cdot 3x^2 = e^{x^3} \cdot 3x^2$.

3) $z = \operatorname{tg}\sqrt{x} \Rightarrow z = \operatorname{tg} y$, где $y = \sqrt{x}$.

Имеем $z'_x = z'_y \cdot y'_x = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\left(\cos\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $z = \sqrt{\ln x} \Rightarrow z = \sqrt{y}$, где $y = \ln x$.

Имеем $z'_x = z'_y \cdot y'_x = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$.

5) $z = \operatorname{ctg}^5 x \Rightarrow z = y^5$, где $y = \operatorname{ctg} x$.

Имеем $z'_x = z'_y \cdot y'_x = 5y^4 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = 5\operatorname{ctg}^4 x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Правило. Если для получения значения z нужно произвести над x много действий, то для применения правила цепочки следует обозначить через y результат всех этих действий, кроме последнего.

Например,

1) если $z = \operatorname{tg}^3\left(\sqrt[5]{\ln\sin x}\right)$, то $z = y^3$, где $y = \operatorname{tg}\sqrt[5]{\ln\sin x}$;

2) если $z = \ln\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{e^x}}$, то $z = \ln y$, где $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{e^x}}$;

3) если $z = \sqrt[8]{\operatorname{ctg}^5(\ln\cos x)}$, то $z = y^{5/8}$, где $y = \operatorname{ctg}(\ln\cos x)$.

Примеры.

1) Пусть $z = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$. Тогда $z'_x = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\left(\cos\sqrt{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) Пусть $z = \sin^3(\ln x)$. Тогда $z'_x = 3\sin^2(\ln x)\cdot\cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$.

3) Пусть $z = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\ln^3(\sin x)\right)}$. Тогда

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\left(\ln^3(\sin x)\right)}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\ln^3(\sin x)\right)} \times$$
$$\times\, 3\ln^2(\sin x)\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x.$$

4) Пусть $z = \operatorname{tg}^5\left(\ln^2\left(\sin\dfrac{x^2}{x+1}\right)\right)$. Тогда

$$z'_x = 5\operatorname{tg}^4\left(\ln^2\left(\sin\frac{x^2}{x+1}\right)\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\ln^2\left(\sin\dfrac{x^2}{x+1}\right)\right)}\times$$
$$\times 2\ln\left(\sin\frac{x^2}{x+1}\right)\times\frac{1}{\sin\dfrac{x^2}{x+1}}\cdot\cos\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}.$$

5) Пусть $z = \log_{\operatorname{tg} x} \cos x$. Имеем, по определению логарифма, $(\operatorname{tg} x)^z = \cos x \Rightarrow z \ln \operatorname{tg} x = \ln \cos x \Rightarrow z = \dfrac{\ln \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$. Следовательно,

$$z'_x = \frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x) \cdot \ln \operatorname{tg} x - \ln \cos x \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\ln^2(\operatorname{tg} x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{-\operatorname{tg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) - \dfrac{1}{\sin x \cos x} \cdot \ln(\cos x)}{\ln^2(\operatorname{tg} x)}.$$

14. Правила дифференцирования обратных функций.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $\langle a, b \rangle$ и является там строго монотонной и непрерывной. Было показано ранее, что тогда у функции $y = f(x)$ имеется обратная функция $x = g(y)$, определенная в промежутке $\langle p, q \rangle$, причем эта функция в промежутке $\langle p, q \rangle$ также строго монотонная и непрерывная. (Здесь $\langle p, q \rangle$ есть множество значений, принимаемых функцией $y = f(x)$ на промежутке $\langle a, b \rangle$). Пусть у функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ существует конечная отличная от нуля производная $f'(x_0)$ ($f'(x_0) \neq \infty$ и $f'(x_0) \neq 0$). Покажем, что тогда у функции $x = g(y)$ в соответствующей точке $y_0 \in \langle p, q \rangle$ ($y_0 = f(x_0)$) также существует конечная производная, причем $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ (короче: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$).

▶ Дадим y_0 приращение Δy — любое, но такое, что $\Delta y \neq 0$ и точка $y_0 + \Delta y \in \langle p, q \rangle$. Тогда функция $x = g(y)$ получит приращение

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0).$$

Отметим, что в силу строгой монотонности функции $x = g(y)$

$$\Delta x \neq 0, \text{ если } \Delta y \neq 0.$$

Отметим далее, что в силу непрерывности функции $x = g(y)$

$$\Delta x \to 0, \text{ если } \Delta y \to 0.$$

Имеем очевидное равенство $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta y \to 0$. Получим

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

По условию $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ (существует конечный, отличный от нуля). Но тогда существует конечный $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$, т. е. существует $g'(y_0)$, причем $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$. ◀

Итак, производные взаимно-обратных функций есть величины взаимно-обратные.

Исходя из этого, можно получить формулы для производных обратных тригонометрических функций.

15. $y=\arcsin x$, $x\in(-1,1)$ ($y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$).

▶ Эта функция является обратной для функции $x=\sin y$, которая для $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ имеет конечную отличную от нуля производную

$$x'_y=\cos y.$$

Но тогда функция $y=\arcsin x$ для $x\in(-1,1)$ имеет конечную производную, причем $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$ (перед радикалом взят знак "+", ибо $\cos y>0$ для $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$). Так как $\sin y=x$, то получаем окончательно

$$y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\text{ т. е. } (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1).$$

Отметим, что значения $x=\pm1$ были исключены, так как для соответствующих значений $y=\pm\frac{\pi}{2}$: $x'_y=\cos y=0$. ◀

16. $y=\arccos x$, $x\in(-1,1)$ ($y\in(0,\pi)$).

▶ Эта функция является обратной для функции $x=\cos y$, которая для $y\in(0,\pi)$ имеет конечную отличную от нуля производную

$$x'_y=-\sin y.$$

Но тогда функция $y = \arccos x$ для $x \in (-1, 1)$ имеет конечную производную, причем $y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$. (Здесь $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$; перед радикалом взят знак "+", ибо $\sin y > 0$ для $y \in (0, \pi)$.) Так как $\cos y = x$, то получаем окончательно

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{т. е. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1).$$

И здесь значения $x = \pm 1$ были исключены, так как для соответствующих значений $y = 0$ и $y = \pi$: $x'_y = -\sin y = 0$. ◀

17. $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ $\left(y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

▶ Эта функция является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$, которая для $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеет конечную отличную от нуля производную

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Но тогда функция $y = \operatorname{arctg} x$ для $x \in (-\infty, +\infty)$ имеет конечную производную, причем $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$. Так как $\operatorname{tg} y = x$, то получаем

$$y'_x = \frac{1}{1+x^2}, \text{т. е. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty). ◀$$

18. $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ $(y \in (0, \pi))$.

▶ Эта функция является обратной для функции $x = \operatorname{ctg} y$, которая для $y \in (0, \pi)$ имеет конечную отличную от нуля производную $x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}$. Но тогда функция $y = \operatorname{arcctg} x$ для $x \in (-\infty, +\infty)$ имеет конечную производную, причем $y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}$. Так как $\operatorname{ctg} y = x$, то получаем

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}, \text{ т. е. } (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

19. О бесконечной производной.

Было доказано ранее: если функция $f(x)$, определенная в окрестности $u(x_0)$ точки x_0, имеет в точке x_0 конечную производную, то она обязательно непрерывна в этой точке. Если же функция $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную, то она уже не обязательно непрерывна в точке x_0. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию

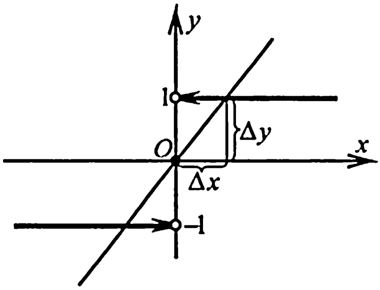


Рис. 4.9

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, +\infty); \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Эта функция, хотя и разрывна в точке $x_0 = 0$, но имеет в этой точке бесконечную производную. Действительно, дадим $x_0 = 0$ приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x > 0$. Тогда

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = 1 - 0 = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty \Rightarrow y'_+(0) = +\infty.$$

Дадим теперь $x_0 = 0$ приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x < 0$. Тогда

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = -1 - 0 = -1.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \left(-\frac{1}{\Delta x}\right) = +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'_-(0) = +\infty$$

Вывод: в точке $x_0 = 0$ функция $f(x)$ имеет бесконечную производную $f'(0) = +\infty$.

Обратимся к другому вопросу. Отыскание значений x, для которых функция $f(x)$ имеет бесконечную производную, связано с некоторым неудобством, вызванным тем, что установленные нами формулы для производных от элементарных функций, равно как и простейшие правила вычисления производных, относятся лишь к конечным производным. В случае же бесконечной производной мы пока никаких общих правил не имели. Сейчас мы хотим восполнить этот пробел. В пункте 3 (см. частные случаи) было установлено, что функция $y=\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$, имеет производную $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$; $y'_+(0) = +\infty$. В точке $x_0 = 0$ график функции $y=\sqrt{x}$ имеет вертикальную касательную (рис. 4.10).

В пункте 15 было установлено, что функция $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, имеет производную $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для $x \in (-1, 1)$. Из рис. 4.11 видим, что график функции $y = \arcsin x$ в точках $x=-1$, $x=1$ имеет вертикальные касательные.

Обращаем внимание на тот факт, что для функции $y=\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to+0} y' = \lim_{x\to+0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty;$$

для функции $y = \arcsin x$:

$$\lim_{x\to-1+0} y' = \lim_{x\to-1+0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty; \quad \lim_{x\to1-0} y' = \lim_{x\to1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty,$$

т. е. пределы совпадают с производными в соответствующих точках. Возникает вопрос: случайно ли это?

Ответ: нет, не случайно. Имеет место следующая **теорема**.

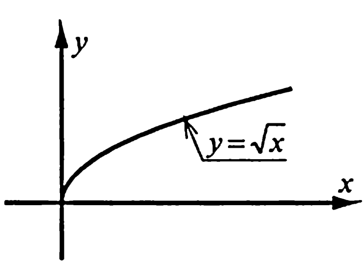


Рис. 4.10

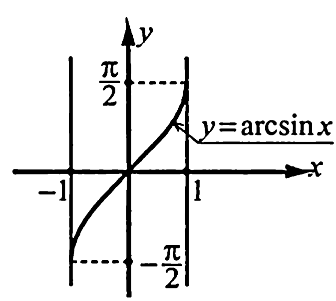


Рис. 4.11

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в окрестности $u(x_0)$ точки x_0. Пусть $f(x)$ имеет конечную производную в проколотой окрестности $\overset{\circ}{u}(x_0)$ точки x_0. Тогда, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\neq x_0)}} f'(x)=\infty$, то $f'(x_0)=\infty$.

На доказательстве этой теоремы мы сейчас останавливаться не будем. Она будет доказана как следствие теоремы Лагранжа, которая будет установлена позже.

§ 4. Дифференциал функции

1. Определение дифференциала. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором промежутке X и пусть точка $x_0\in X$. Дадим значению x_0 аргумента приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x\neq 0$ и точка $x_0+\Delta x\in X$. Пусть $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ есть приращение функции $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента. Мы знаем, что если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$, то приращение Δy функции представимо в виде

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \tag{1}$$

где $\alpha(\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow}0$.

Замечаем, что если $f'(x_0)\neq 0$, то первое слагаемое в правой части формулы (1) пропорционально величине Δx или, как говорят, линейно зависит от Δx. Так как в этом случае $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f'(x_0)\neq 0$, то упомянутое слагаемое $f'(x_0)\cdot\Delta x$ является при $\Delta x\to 0$ бесконечно малой того же порядка, что и Δx.

Второе слагаемое $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ правой части (1) при $\Delta x\to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, ибо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$$

Полагаем

$$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{2}$$

и называем эту величину *дифференциалом* функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Таким образом, дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется произведение производной, вычисленной в этой точке, на приращение Δx независимой переменной.

Дифференциалом независимой переменной x называют ее приращение, т. е. полагают $dx = \Delta x$. Следовательно, вместо равенства (2) можно писать

$$dy = f'(x_0)dx\,. \tag{3}$$

Из равенства (3), разрешая его относительно $f'(x_0)$, находим

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\,. \tag{4}$$

Тем самым символ $\frac{dy}{dx}$ может рассматриваться как обычная дробь, знаменатель которой есть dx, а числитель — dy.

Вернемся снова к формуле (1). Если $f'(x_0) \neq 0$, т. е. $dy \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$, то

$$\frac{\Delta y}{dy} = \frac{f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{f'(x_0)\cdot\Delta x} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0)} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = 1\,.$$

Значит, в случае, когда $f'(x_0) \neq 0$, приращение функции Δy и ее дифференциал dy оказываются эквивалентными бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. Поэтому в этом случае вполне оправдано приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy\,. \tag{5}$$

Ясно, что приближенное равенство (5) тем точнее (как в смысле абсолютной, так и в смысле относительной погрешности), чем меньше Δx.

Обычно структура дифференциала функции dy значительно проще структуры ее приращения Δy, и поэтому формулой (5) широко пользуются в приближенных вычислениях. Например, для функции $y = x^3$:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\cdot\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

в то время как

$$dy = 3x^2\cdot\Delta x\,.$$

Если взять $x = 2$, $\Delta x = 0.01$, то

$$\Delta y = 3\cdot 4\cdot 0.01 + 3\cdot 2\cdot 0.0001 + 0.000001 = 0.120601\,,$$

а

$$dy = 3\cdot 4\cdot 0.01 = 0.12\,.$$

Таким образом, абсолютная ошибка

$$|dy - \Delta y| = 0.000601\,,$$

относительная ошибка

$$\left|\frac{dy-\Delta y}{\Delta y}\right| = \frac{0.000601}{0.120601} \approx 0.005(\frac{1}{2}\%)\,.$$

2. Геометрический смысл дифференциала.

Пусть имеется график (L) функции $y=f(x)$, $x \in X$. Пусть значению x_0 аргумента x на кривой отвечает некоторая точка M_0. Проведем к кривой (L) в точке M_0 касательную M_0T. Для углового коэффициента касательной мы знаем формулу

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)\,.$$

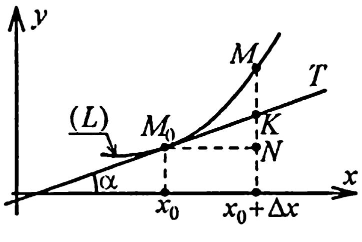


Рис. 4.12

При переходе от x_0 к $x_0+\Delta x$ ордината касательной получит приращение

$$NK = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)\cdot\Delta x = dy\,.$$

Таким образом, dy есть приращение ординаты точки, лежащей на касательной к кривой (L) в точке M_0, при переходе от x_0 к $x_0+\Delta x$.

Отметим, что замена приращения функции Δy дифференциалом dy равносильна переходу от заданной функциональной зависимости y от x ($y=f(x)$) к линейной зависимости y от x в достаточно малой окрестности точки x_0. При такой замене получающаяся погрешность оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем приращение аргумента.

3. Сводка формул для дифференциалов.

Поскольку дифференциал dy функции $y=f(x)$ получается умножением производной этой функции $f'(x)$ на дифференциал независимой переменной dx, постольку операции на вычисление производной и дифференциала, с точки зрения техники вычислений, почти не отличаются друг от друга. Это позволяет нам из сводки формул для производных получить соответствующую сводку формул для дифференциалов.

Например, из формулы $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$, умножив обе части на dx, получим

$$(u(x)\cdot v(x))'\,dx = u'(x)\cdot v(x)dx + u(x)\cdot v'(x)dx\,,$$

или

$$d\,(u(x)\cdot v(x)) = v(x)\cdot du(x) + u(x)\cdot dv(x)\,.$$

Поступая аналогичным образом и в иных случаях, найдем:

1) $dC = 0$ ($C = \text{const}$).

2) $d\big(u(x) \pm v(x)\big) = du(x) \pm dv(x)$.

3) $d\big(u(x)v(x)\big) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$.

4) $d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}$.

5) $d(x^r) = rx^{r-1}dx$.

6) $d\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

7) $d\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{dx}{x^2}$.

8) $d(a^x) = a^x \ln a dx$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

9) $d(e^x) = e^x dx$.

10) $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$.

11) $d(\log_a x) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{dx}{x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

12) $d(\sin x) = \cos x dx$.

13) $d(\cos x) = -\sin x dx$.

14) $d(\operatorname{tg} x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

15) $d(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.

16) $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

17) $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

18) $d(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{dx}{1 + x^2}$.

19) $d(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$.

20) $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx$.

21) $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx$.

22) $d(\operatorname{th} x) = \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

23) $d(\operatorname{cth} x) = -\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала

Рассмотрим сложную функцию $z = f(y)$, где $y = \varphi(x)$. Считаем, что функция $z = f(y)$ определена на промежутке $Y = \{y\}$, а функция $y = \varphi(x)$ определена на промежутке X и такая, что $\varphi(x) \in Y$, если $x \in X$. Пусть функция $y = \varphi(x)$ имеет конечную производную y'_x на промежутке X, а функция $z = f(y)$ имеет конечную производную z'_y на промежутке Y.

Так как $z = f(\varphi(x))$ есть функция независимой переменной x, определенная на промежутке X, то, по определению дифференциала, имеем

$$dz = z'_x \cdot dx. \qquad (*)$$

Но по правилу дифференцирования сложной функции

$$z'_x = z'_y \cdot y'_x.$$

Подставляя это выражение для z'_x в соотношение (*), получим

$$dz = z'_y \cdot y'_x dx.$$

Так как $y'_x dx = dy$ (по определению дифференциала), то будем иметь

$$dz = z'_y dy \qquad (**)$$

Сравнивая соотношения (*) и (**), замечаем, что дифференциал сложной функции z через промежуточную переменную y выражается в той же форме, как и через независимую переменную x. В этом и состоит *инвариантность* (неизменяемость) *формы дифференциала.*

Следует, однако, помнить, что в случае, когда y — независимая переменная, то $dy = \Delta y$ (т. е. dy есть произвольное приращение), а в случае, когда y — функция, то dy есть дифференциал этой функции, т. е. величина, вообще говоря, не совпадающая с ее приращением Δy ($dy \neq \Delta y$, вообще говоря).

§ 5. Производные высших порядков

1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором промежутке X и в каждой точке x этого промежутка имеет конечную производную $f'(x)$. Тогда $f'(x)$ сама является функцией от x на промежутке X. Поэтому можно поставить вопрос о нахождении производной от этой новой функции. Если существует производная от $f'(x)$, то ее называют *второй производной* (или *производной второго порядка*) от заданной функции $y=f(x)$ и обозначают одним из символов

$$y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ f''(x),\ \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Может оказаться, что и вторая производная $f''(x)$ имеет производную в промежутке X. Тогда производную от $f''(x)$ называют третьей производной (или производной третьего порядка) от заданной функции $y=f(x)$ и обозначают одним из символов

$$y''',\ \frac{d^3y}{dx^3},\ f'''(x),\ \frac{d^3f(x)}{dx^3}.$$

Аналогично вводятся четвертая, пятая и т. д. производные от функции $y=f(x)$. Для обозначения производной n-го порядка употребляются символы

$$y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Замечание. Чтобы имело смысл говорить о конечном или бесконечном значении $y^{(n)}$ в точке $x_0 \in X$, нужно, чтобы $y^{(n-1)}$ как функция от x была определена и конечна в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0. Таким образом, когда говорят, что в точке x_0 имеется конечная или бесконечная n-я производная функции $y=f(x)$, то тем самым подразумевается существование конечной производной $(n-1)$-го порядка этой функции в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0.

Чтобы найти производную n-го порядка от данной функции $y=f(x)$, нужно предварительно вычислить, вообще говоря, последовательно производные всех предшествующих порядков. Однако есть случаи, когда можно получить общую формулу для производной n-го порядка функции $y=f(x)$, которая не содержит обозначений производных этой функции предшествующих порядков.

Пример 1. Пусть $y = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$. Имеем

$$y' = \frac{1}{x};\quad y''(x) = -\frac{1!}{x^2};\quad y'''(x) = \frac{2!}{x^3}.$$

Допустим, что

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}. \qquad (*)$$

Тогда

$$y^{(n+1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)\cdot\frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Видим, что переход от n к $(n+1)$ сделан. Для $n=1$ (считаем $0! = 1$), $n=2$, $n=3$ формула (*) установлена непосредственно. В силу перехода от n к $(n+1)$ формула (*) будет верна для $n = 4, 5, \ldots$, т. е. для любого $n \in \mathbf{N}$.

Таким образом,

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},\quad x \in (0, +\infty),\quad n \in \mathbf{N}.$$

Пример 2. Пусть $y = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Имеем

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\quad y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Допустим, что

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \qquad (*)$$

Тогда

$$y^{(n+1)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Видим, что переход от n к $(n+1)$ сделан. Для $n=1$, $n=2$ формула (*) установлена непосредственно. В силу перехода от n к $(n+1)$ формула (*) будет верна для $n = 3, 4, \ldots$, т. е. для любого $n \in \mathbf{N}$.

Итак,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad x \in (-\infty, +\infty),\quad n \in \mathbf{N}.$$

Пример 3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ в некотором промежутке X имеют конечные производные всех порядков до n включительно. Рассмотрим функцию $y(x) = u(x) \pm v(x)$. Имеем

$$y' = \left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x) \text{ (это известно)},$$

$$y'' = \left(u'(x) \pm v'(x)\right)' = \left(u'(x)\right)' \pm \left(v'(x)\right)' = u''(x) \pm v''(x).$$

Допустим, что

$$y^{(m)} = u^{(m)}(x) \pm v^{(m)}(x) (m \le n-1, m \in \mathrm{N}). \qquad (*)$$

Тогда

$$y^{(m+1)} = \left(u^{(m)}(x) \pm v^{(m)}(x)\right)' = \left(u^{(m)}(x)\right)' \pm \left(v^{(m)}(x)\right)' = \\ = u^{(m+1)}(x) \pm v^{(m+1)}(x).$$

Видим, что переход от m к $m+1$ сделан. Для $m = 1$, $m = 2$ формула (*) установлена непосредственно. В силу перехода от m к $m+1$ формула (*) будет верна для $m = 3, 4, \ldots, n$.

Итак,

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)^{(m)} = u^{(m)}(x) \pm v^{(m)}(x), \quad x \in X; \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Формула Лейбница для производной n-го порядка от произведения двух функций.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ в некотором промежутке X имеют конечные производные всех порядков до n включительно. Тогда функция $y = u(x) \cdot v(x)$ имеет в промежутке X конечные производные всех порядков до n включительно, причем

$$y^{(m)} = (u \cdot v)^{(m)} = u^{(m)}v + C_m^1 u^{(m-1)}v' + C_m^2 u^{(m-2)}v'' + \ldots + \\ + C_m^{k-1} u^{(m-k+1)} v^{(k-1)} + C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)} + \ldots + uv^{(m)}, m = 1, 2, \ldots, n. \qquad (*)$$

▶ Имеем

$$y' = (uv)' = u'v + uv' \text{ (это известно)};$$

$$y'' = (u'v + uv')' = (u'v)' + (uv')' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

Допустим, что формула (*) верна для любого m, удовлетворяющего условию: $m \le n-1$ ($m \in \mathrm{N}$). Тогда

$$y^{(m+1)} = (y^{(m)})' = u^{(m+1)}v + (1 + C_m^1)\, u^{(m)}v' + (C_m^1 + C_m^2)\, u^{(m-1)}v'' + \\ + \ldots + (C_m^{k-1} + C_m^k) u^{(m-k+1)} v^{(k)} + \ldots + uv^{(m+1)}.$$

Так как

$$1 + C_m^1 = 1 + m = C_{m+1}^1,$$

$$C_m^1 + C_m^2 = m + \frac{m(m-1)}{2} = m\left(1 + \frac{m-1}{2}\right) = \frac{(m+1)m}{2} = C_{m+1}^2,$$

....

$$C_m^{k-1} + C_m^k = \frac{m(m-1)\ldots[m-(k-2)]}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)} +$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots[m-(k-2)]\,[m-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)\cdot k} =$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots[m-(k-2)]}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)}\cdot\left(1 + \frac{m-(k-1)}{k}\right) =$$

$$= \frac{(m+1)m(m-1)\ldots[(m+1)-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} = C_{m+1}^k,$$

то получаем

$$y^{(m+1)} = u^{(m+1)}v + C_{m+1}^1 u^{(m)}v' + C_{m+1}^2 u^{(m-1)}v'' + \ldots +$$

$$+C_{m+1}^k u^{(m+1-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(m+1)}.$$

Видим, что переход от m к $m+1$ сделан. Для $m = 1$, $m = 2$ формула (*) установлена непосредственно. В силу перехода от m к $m+1$ формула (*) будет верна для $m = 3, 4, \ldots, n$. ◀

Замечание. Формула Лейбница, которую мы сейчас установили, во многих случаях позволяет сократить вычисления.

Пример. Пусть $y = x^2 e^x$. Требуется вычислить $y^{(100)}$.

▶ Имеем

$$y^{(100)} = (\underbrace{e^x}_{=u}\cdot\underbrace{x^2}_{=v})^{(100)} = (e^x)^{(100)}\cdot x^2 + 100\cdot(e^x)^{(99)}\cdot(x^2)' +$$

$$+\frac{100\cdot 99}{2}\cdot(e^x)^{(98)}\cdot(x^2)'' + 0 = e^x\cdot x^2 + 200e^x\cdot x + 9900e^x. ◀$$

3. Механическое истолкование второй производной.

Пусть материальная точка M движется по прямой линии по закону $s = f(t)$. Мы знаем, что скорость $v(t)$ точки M в момент времени t равна: $v(t) = f'(t)$. Поставим себе задачу: найти ускорение точки M в данный момент времени t.

Для этого перейдем от момента времени t к моменту $t+\Delta t$. За промежуток времени от t до $t+\Delta t$ скорость v точки M получит приращение $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$. Среднее ускорение $a_{\text{ср}}$ точки M за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ будет равно: $a_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

Легко понять, что чем меньше промежуток времени Δt, тем меньше $a_{\text{ср}}$ будет отличаться от ускорения точки M в момент t. Исходя из этого, ускорением a точки M в момент t будем называть предел, к которому стремится среднее ускорение $a_{\text{ср}}$, когда $\Delta t \to 0$.

Таким образом, ускорение точки M в момент времени t определяется равенством $a(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} a_{\text{ср}}$ или

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) \Rightarrow a(t) = \left(f'(t)\right)' = f''(t).$$

Итак, ускорение точки M, движущейся по прямой, в момент t есть вторая производная от функции, описывающей закон движения точки M, вычисленная в момент t.

§ 6. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором промежутке X и имеет там конечную производную $f'(x)$. Тогда, как мы знаем,

$$dy = f'(x)dx. \qquad (1)$$

Ясно, что dy есть функция от x, определенная в промежутке X, и поэтому можно поставить вопрос о нахождении дифференциала от этой новой функции.

Второй дифференциал d^2y функции $y=f(x)$ определяется как дифференциал от первого дифференциала, т. е. $d^2y = d(dy)$. Если дифференциал $d^{n-1}y$ порядка $(n-1)$ функции $y=f(x)$ уже определен, то дифференциал $d^n y$ порядка n функции $y=f(x)$ равен:

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

При этом, конечно, предполагается существование соответствующих дифференциалов.

При вычислении дифференциалов высшего порядка следует существенно различать два случая: 1) когда аргумент x является независимой переменной; 2) когда аргумент x представляет собой дифференцируемую функцию некоторой переменной t.

Переходя к вычислению дифференциалов высшего порядка, прежде всего рассмотрим случай, когда аргумент x является независимой переменной. В этом случае $dx = \Delta x$, т. е. dx совпадает с произвольным приращением независимой переменной, а значит, dx не зависит от x и, следовательно, при дифференцировании по x величину dx следует рассматривать как постоянное число. Стало быть, будем иметь

$$d^2y = d(dy) = d\left[f'(x)\cdot dx\right] = \left[f'(x)\cdot dx\right]'\cdot dx = f''(x)\cdot(dx)^2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d^3y = d(d^2y) = d\left[f''(x)\cdot(dx)^2\right] = \\ = \left[f''(x)\cdot(dx)^2\right]'\cdot dx = f'''(x)\cdot(dx)^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Допустим, что

$$d^n y = f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n. \quad (*)$$

Тогда

$$\begin{aligned} d^{n+1}y = d(d^n y) = d\left[f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n\right] = \\ = \left[f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n\right]'\cdot dx = f^{(n+1)}(x)\cdot(dx)^{n+1}. \end{aligned}$$

Видим, что переход от n к $n+1$ сделан.

Для $n=2$, $n=3$ формула (*) установлена непосредственно. В силу перехода от n к $n+1$ формула (*) будет верна для $n = 4, 5, \ldots$, т. е. вплоть до того n, для которого существуют соответствующие дифференциалы функции $y=f(x)$. Из формулы (*) получаем следующее равенство:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{(dx)^n}. \quad (4)$$

Таким образом, для случая, когда аргумент x является независимой переменной, n-я производная функции $y=f(x)$ в точке $x \in X$ равна отношению дифференциала n-го порядка этой функции в точке x, к n-й степени дифференциала аргумента.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда аргумент x сам является функцией $x = \varphi(t)$ некоторой переменной t. Будем иметь в этом случае $y = f\left[\varphi(t)\right]$, где t — независимая переменная, а x — промежуточная переменная.

По свойству инвариантности формы дифференциала первого порядка сложной функции и в этом случае будет

$$dy = f'(x) \cdot dx .$$

Только в этом случае dx уже нельзя рассматривать как постоянное число, ибо $dx = \varphi'(t)dt$. Здесь уже второй дифференциал d^2x, вообще говоря, не равен нулю и определяется формулой $d^2x = \varphi''(t) \cdot (dt)^2$. Поэтому, используя правило вычисления дифференциала от произведения двух функций, будем иметь, например,

$$d^2y = d(dy) = d\left[f'(x) \cdot dx\right] = dx \cdot d\left[f'(x)\right] + f'(x) \cdot d(dx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2y = f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) \cdot d^2x ; \tag{5}$$

$$d^3y = d(d^2y) = d\left[f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) \cdot d^2x\right] =$$

$$= d\left[f''(x) \cdot (dx)^2\right] + d\left[f'(x) \cdot d^2x\right] =$$

$$= f'''(x) \cdot (dx)^3 + 2f''(x)dx \cdot d^2x + f''(x)dx \cdot d^2x + f'(x) \cdot d^3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^3y = f'''(x)(dx)^3 + 3f''(x)dx \cdot d^2x + f'(x)d^3x . \tag{6}$$

Мы видели, что когда переменная x была независимой, то

$d^2y = f''(x)(dx)^2, d^3y = f'''(x)(dx)^3$ (см. формулы (2) и (3)).

Сопоставив эти равенства с равенствами (5) и (6) соответственно, замечаем, что свойство инвариантности формы для дифференциалов сложной функции порядка n ($n \geq 2$) в общем случае уже не имеет места.

Мы сказали "в общем случае" потому, что имеется частный случай, когда свойство инвариантности имеет место. Это будет тогда, когда x является линейной функцией от t, т. е.

$$x = at + b$$

(a и b — постоянные числа). Действительно, в этом случае

$$dx = adt = a\Delta t \Rightarrow d^2x \equiv 0, d^3x \equiv 0 ,$$

и, следовательно, вместо формул (5) и (6) будем иметь $d^2y = f''(x) \cdot (dx)^2$, $d^3y = f'''(x) \cdot (dx)^3$.

§ 7. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Бывают случаи, когда зависимость переменной y от переменной x не задана непосредственно, а вместо этого задана зависимость обеих переменных x и y от некоторой третьей, вспомогательной, переменной t (называемой параметром):

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{1}$$

Считаем, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определены на одном и том же промежутке $T=\{t\}$.

Пусть точка $t_0 \in T$ и пусть в окрестности $u(t_0)$ точки t_0 функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют нужное количество конечных производных по переменной t. Будем предполагать, что $\varphi'(t) \neq 0$ в $u(t_0)$ и что функция $x=\varphi(t)$ строго монотонная в $u(t_0)$. Но тогда, как мы знаем, у функции $x=\varphi(t)$ существует обратная функция $t=\omega(x)$, определенная в окрестности $v(x_0)$ точки x_0 ($x_0=\varphi(t_0)$; $v(x_0)$ — образ $u(t_0)$ при отображении φ).

Отметим, что функция $t=\omega(x)$ в $v(x_0)$ будет непрерывной, строго монотонной и имеющей конечную производную $t'_x=\dfrac{1}{x'_t}$. Подставив $t=\omega(x)$ в соотношение $y=\psi(t)$, получим

$$y=\psi(\omega(x)). \tag{2}$$

Видим, что y можно рассматривать как функцию независимой переменной x, а переменную t считать промежуточным аргументом. По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x=y'_t\cdot t'_x$. Так как $t'_x=\dfrac{1}{x'_t}$, то окончательно получаем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad t\in u(t_0). \tag{3}$$

Пример. Пусть

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad t\in(0,\pi).$$

Имеем $x'_t=a(1-\cos t)=2a\sin^2\dfrac{t}{2}$ ($x'_t\neq 0$ для $t\in(0,\pi)$); $y'_t=$ $=a\sin t=2a\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$. Значит,

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2a\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},\quad t\in(0,\pi).$$

Чтобы найти y''_{x^2}, поступаем следующим образом. Замечаем, что функция y'_x параметрически задается уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'_x = \psi_1(t), \end{cases} \quad \text{где} \quad \psi_1(t) = \frac{y'_t}{x'_t} \left(= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right).$$

А тогда, по установленному выше (см. (3)), находим

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'(t)} = [y'_x]'_t \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

В нашем примере

$$y''_{x^2} = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Аналогично, считая, что функция y''_{x^2} задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y''_{x^2} = \psi_2(t), \end{cases} \quad \text{где} \quad \psi_2(t) = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'(t)},$$

находим

$$y'''_{x^3} = \frac{\psi'_2(t)}{\varphi'(t)} = \left[y''_{x^2}\right]'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$$

и т. д. И вообще для любого $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$y^{(n)}_{x^n} = \left[y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right]'_t \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

§ 8. Основные теоремы дифференциального исчисления

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0. Если $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную или бесконечную, но определенного знака производную, то будем говорить, что функция $f(x)$ в точке x_0 *имеет определенную производную.*

1. Теорема Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена на замкнутом промежутке $[a,b]$ и пусть в некоторой внутренней точке c этого промежутка (т. е. в точке $c \in (a,b)$) $f(x)$ принимает либо свое наибольшее, либо свое наименьшее значение. Тогда, если в этой точке c $f(x)$ имеет определенную производную, то обязательно $f'(c) = 0$.

▶ Пусть, для определенности, $f(x)$ в точке c принимает свое наибольшее значение. Тогда для всех $x \in [a,b]$ будет $f(x) < f(c)$.

1) Возьмем Δx — любое, но такое, что $\Delta x > 0$ и точка $c+\Delta x \in [a,b]$. Имеем $f(c+\Delta x) < f(c) \Rightarrow f(c+\Delta x) - f(c) < 0$. Значит, $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} < 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0$, т. е.

$$f'_{+}(c) \le 0 . \qquad (*)$$

2) Возьмем теперь Δx — любое, но такое, что $\Delta x < 0$ и точка $c+\Delta x \in [a,b]$. Имеем $f(c+\Delta x) < f(c) \Rightarrow f(c+\Delta x) - f(c) < 0$. Значит, $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} > 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0$, т. е.

$$f'_{-}(c) \ge 0 . \qquad (**)$$

По условию функция $f(x)$ в точке c имеет определенную производную. Поэтому правосторонняя и левосторонняя производные функции $f(x)$ в точке c должны совпадать. Но из (*) и (**) следует, что осуществление соотношения $f'_{+}(c) = f'_{-}(c)$ возможно лишь тогда, когда $f'_{+}(c) = 0$ и $f'_{-}(c) = 0$, т. е. когда $f'(c) = 0$. ◀

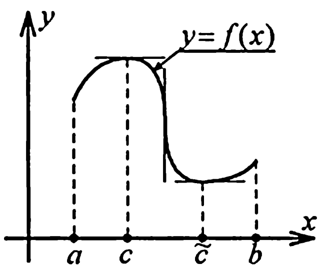


Рис. 4.13

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма состоит в том, что если в точке $c \in (a,b)$ функция $f(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение, то касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $(c, f(c))$ параллельна оси Ox (см. рис. 4.13).

Замечание. Доказанная теорема неприменима, если функция $y=f(x)$ принимает свое наибольшее или наименьшее значение на концах промежутка $[a,b]$. Так, например, функция $y=x$, рассматриваемая на промежутке $[0,1]$, принимает в точке $x=0$ наименьшее значение, а в точке $x=1$ — наибольшее значение. Однако $f'_{+}(0) = 1$, $f'_{-}(1) = 1$ (см. рис. 4.14).

Теорема неприменима и в том случае, когда функция $f(x)$ принимает свое наибольшее или наименьшее значение во внутренней точке c промежутка $[a,b]$, но не имеет в точке c определенной производной. Так, например, функции $y=|x|$ и $y=x^{2/3}$, рассматриваемые в промежутке $[-1,1]$ принимают в точке $x=0$ свое наименьшее значение. Однако, для функции $y=|x|$ имеем: $y'_{-}(0) = -1$, $y'_{+}(0) = 1$, а для функции $y=x^{2/3}$ имеем: $y'_{-}(0) = -\infty$, $y'_{+}(0) = +\infty$ (см. рис. 4.15 и 4.16).

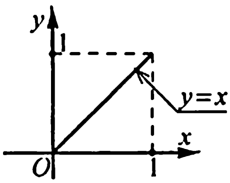


Рис. 4.14

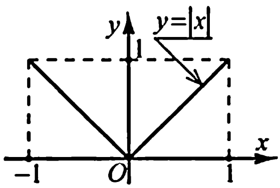


Рис. 4.15

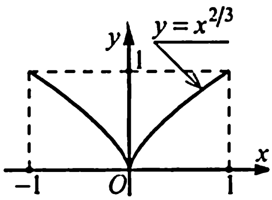


Рис. 4.16

2. Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$;

2) $f(x)$ имеет определенную производную $f'(x)$ хотя бы в открытом промежутке (a,b);

3) $f(x)$ принимает равные значения на концах промежутка, т. е. $f(a)=f(b)$.

Тогда между точкой a и точкой b найдется, по крайней мере, одна точка c, в которой производная функции обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$.

▶ По условию функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$. Значит, $f(x)$ достигает в этом промежутке как своего наибольшего M, так и своего наименьшего m значений. Значит, для всех $x\in[a,b]$ будет:

$$m\le f(x)\le M\,. \qquad (1)$$

Могут реализоваться два случая: 1) $m=M$ и 2) $m<M$.

1) Если $m=M$, то из неравенства (1) следует, что все значения функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$ равны между собой, т. е.

$$f(x)\equiv\text{const},\, x\in[a,b],$$

и, следовательно, $f'(x)=0$ для всех $x\in(a,b)$.

2) $m<M$. В этом случае хотя бы одно из двух значений m или M функция $f(x)$ принимает во внутренней точке c промежутка $[a,b]$ (так как иначе, ввиду того, что $f(a)=f(b)$, мы имели бы, что $m=M$, а это не так). Видим, что у нас выполнены все условия теоремы Ферма. Значит, $f'(c)=0$. ◀

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты графика функции $y=f(x)$ равны, то на кривой обязательно найдется точка, где касательная параллельна оси Ox (см. рис. 4.17 и 4.18).

Обращаем внимание на то, что непрерывность функции $f(x)$ на замкнутом промежутке $[a,b]$ и существование определенной производной во всем открытом промежутке (a,b) существенны для верности заключения теоремы.

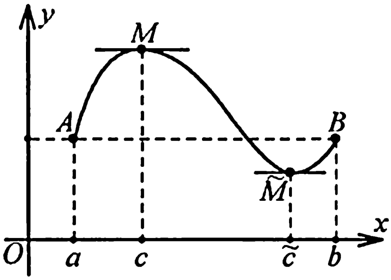


Рис. 4.17

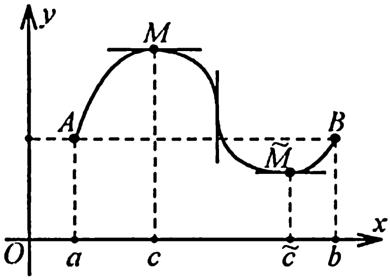


Рис. 4.18

Функция $f(x) = x - \mathrm{E}(x)$ в промежутке $[0, 1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, за исключением того, что имеет разрыв в точке $x = 1$ (см. рис. 4.19).

$$f(x) = x - \mathrm{E}(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \in [0, 1); \\ 0, & \text{если} \quad x = 1. \end{cases}$$

$f'(x) = 1$ для всех $x \in (0, 1)$, т. е. $f'(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $(0, 1)$.

Функции $y = |x|$ и $y = x^{2/3}$, рассматриваемые в промежутке $[-1, 1]$, удовлетворяют всем условиям теоремы Ролля, за исключением того, что в точке $x = 0$ не имеют определенной (двусторонней) производной.

Для функции $y = |x|$ имеем: $y' = -1$, если $x \in (-1, 0)$, и $y' = 1$, если $x \in (0, 1) \Rightarrow y' \neq 0$ для $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Для функции $y = x^{2/3}$ имеем: $y' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{1/3}} \Rightarrow y' \neq 0$ для $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ (см. рис. 4.15 и 4.16).

Точно так же существенно и условие 3) теоремы ($f(a) = f(b)$). Функция $y = x$ в промежутке $[0, 1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, за исключением условия 3) ($f(0) \neq f(1)$). Для функции $y = x$ имеем: $y' = 1$ для всех $x \in (0, 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow y'$ не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $(0, 1)$.

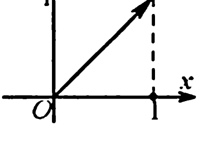


Рис. 4.19

Частный случай (теоремы Ролля). Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$;

2) $f(x)$ дифференцируема во всех точках открытого промежутка (a,b);

3) $f(x)$ обращается в нуль на концах промежутка $[a,b]$, т. е. $f(a) = f(b) = 0$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль.

Короче: между двумя нулями дифференцируемой функции всегда лежит хотя бы один нуль ее производной.

Примеры.

1. Пусть $f(x) = x^2 - 4x$. Имеем $f(0) = f(4) = 0$; $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(x) = 0$ в точке $x = 2$. В этом примере $a = 0$; $b = 4$; $c = 2$ ($a < c < b$).

2. Пусть $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. $f(x)$ обращается в нуль в точках $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \Rightarrow f'(x) = 0$ в точках $\tilde{x}_1 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\tilde{x}_2 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. Здесь: точка $\tilde{x}_1 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ лежит между точками $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$; точка $\tilde{x}_2 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ лежит между точками $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

3. Пусть имеется полином $P_n(x)$ и пусть все корни этого полинома вещественны и различны. Тогда все корни производной этого полинома тоже вещественны и различны. (Корни производной полинома должны лежать между корнями полинома $P_n(x)$.)

3. Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$;

2) $f(x)$ имеет определенную производную $f'(x)$ хотя бы в открытом промежутке (a,b).

Тогда между точкой a и точкой b найдется, по крайней мере, одна точка c такая, в которой имеет место равенство:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

▶ Для доказательства введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Отметим, что:

1) $F(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, ибо $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$;

2) $F(x)$ имеет определенную производную $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ хотя бы в открытом промежутке (a,b), ибо в (a,b) существует определенная производная $f'(x)$;

3) $F(a) = F(b) (= 0)$.

Видим, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля. Следовательно, между точкой a и точкой b обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что будет $F'(c) = 0$, т. е. $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, а значит, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ◀

Полученную формулу называют *формулой конечных приращений Лагранжа*. Приведем другие формы записи формулы Лагранжа.

1. $$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \text{ где } a < c < b. \qquad (*)$$

Заметим, что формуле $(*)$ можно придать и такой вид: $f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$, откуда следует несущественность того, будет ли $a < b$ или, наоборот, $a > b$.

2. Пусть $a < c < b$. Из каждого члена этого неравенства вычтем a. Получим $0 < c-a < b-a$. Так как $b-a > 0$, то все члены последнего неравенства можно поделить на $(b-a)$. Будем иметь $0 < \frac{c-a}{b-a} < 1$. Обозначим $\frac{c-a}{b-a} = \theta$ (это — обычное обозначение величины, лежащей между 0 и 1). Отсюда $c = a + \theta(b-a)$. Поэтому формулу Лагранжа можно записать в виде

$$f(b) - f(a) = f'\big(a + \theta(b-a)\big) \cdot (b-a) \qquad (0 < \theta < 1).$$

3. Рассмотрим промежуток $[x, x+\Delta x]$, т. е. положим $a = x$, $b = x + \Delta x$. Тогда $b - a = \Delta x$, и формула Лагранжа запишется в виде

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (0 < \theta < 1).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем. Пусть $A\big(a, f(a)\big)$ и $B\big(b, f(b)\big)$ — концы графика функции $y = f(x)$, AB — хорда, соединяющая точки A и B (см. рис. 4.20). Тогда левая часть формулы $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ представляет собой $\operatorname{tg}\beta$, т. е. тангенс угла, образованного хордой AB с положительным направлением оси Ox. Поэтому равенство $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ может быть переписано в виде $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$. Значит, на кривой AB имеется, по крайней мере, одна точка $(c, f(c))$ такая, в которой касательная к AB параллельна хорде AB.

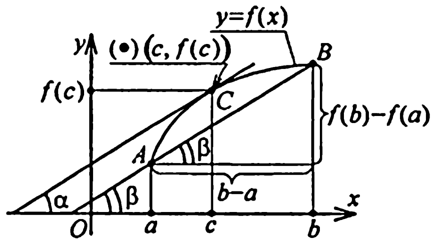


Рис. 4.20

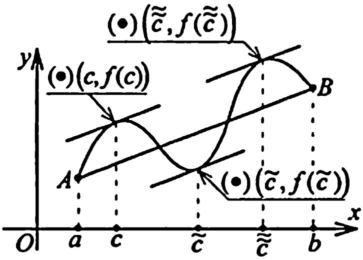


Рис. 4.21

Следствие из теоремы Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в окрестности $u(x_0)$ точки x_0. Пусть $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в проколотой окрестности $\mathring{u}(x_0)$ точки x_0. Тогда, если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x),$$

то существует и производная $f'(x_0)$, равная этому пределу.

▶ Дадим x_0 приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $x_0 + \Delta x \in u(x_0)$. В промежутке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ применим к функции $f(x)$ теорему Лагранжа. Будем иметь

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x)\Delta x \qquad (0 < \theta < 1),$$

откуда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x)$.

Если положить $x_0 + \theta \cdot \Delta x = x$, то очевидно, что $x \to x_0$, если $\Delta x \to 0$, причем $x \neq x_0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x \neq 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x \neq 0)}} f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x).$$

Это означает, что $f'(x_0)$ существует, и справедливо равенство

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x). \blacktriangleleft$$

Пример. Пусть $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sin x$. Ясно, что эта функция определена и непрерывна для $x\in[0,+\infty)$. Для $x>0$ имеем

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cdot\cos x=\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}+\sqrt{x}\cdot\cos x$$

и, следовательно,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}+\sqrt{x}\cdot\cos x\right)=0\,.$$

4. Теорема Коши. Пусть имеются две функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на замкнутом промежутке $[a,b]$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ хотя бы в открытом промежутке (a,b);

3) для всех $x\in(a,b)$: $g'(x)\neq 0$.

Тогда между точками a и b обязательно найдется по крайней мере одна точка c такая, в которой имеет место равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

▶ Заметим сначала, что $g(b)\neq g(a)$. Действительно, если предположить, что $g(b)=g(a)$, то функция $g(x)$ будет удовлетворять всем трем условиям теоремы Ролля, и тогда по этой теореме между точками a и b обязательно найдется хотя бы одна точка $\tilde{c}$ такая, что будет $g'(\tilde{c})=0$. А это невозможно, ибо по условию $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)). \qquad (*)$$

Замечаем, что:

1) $F(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$, ибо $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a,b]$;

2) $F(x)$ имеет конечную производную $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$ хотя бы в открытом промежутке (a,b), ибо в (a,b) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$;

3) $F(b)=F(a)=0$ (в этом убеждаемся непосредственной подстановкой в выражение (*) для $F(x)$ значений $x=b$ и $x=a$).

Видим, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля. Следовательно, между точками a и b обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что будет $F'(c)=0$, т. е.

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0\text{, а значит, }\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \blacktriangleleft$$

Установленная формула называется *формулой Коши.*

Замечание 1. В условии 2) теоремы можно допустить, что $f'(x)$ и $g'(x)$ могут принимать в промежутке (a,b) и бесконечные, но определенного знака, значения. Только эти бесконечные значения они не должны принимать в одной и той же точке.

Замечание 2. Формула конечных приращений Лагранжа является частным случаем формулы Коши, когда $g(x)=x$, $x\in[a,b]$.

Замечание 3. Формула Коши, так же как и формула Лагранжа, имеет место не только когда $a<b$, но и в случае, когда $a>b$.

§ 9. Формула Тейлора

1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $u_\rho(a)$ точки a и имеет там конечные производные до порядка n включительно. Значит, сама функция $f(x)$ и ее производные до порядка $(n-1)$ включительно непрерывны в $u_\rho(a)$. Утверждаем, что при этих условиях для любого x из $u_\rho(a)$ имеет место равенство

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{1}$$

Здесь точка c есть некоторая точка, лежащая между точкой a и точкой x.

$\blacktriangleright$ Возьмем в $u_\rho(a)$ любые две точки α и β $(\alpha\neq\beta)$ и закрепим их. Введем в рассмотрение число

$$\omega=\frac{f(\beta)-f(\alpha)-\dfrac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha)-\dfrac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2-}{(\beta-\alpha)^n}$$
$$\frac{-\ldots-\dfrac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}}{(\beta-\alpha)^n}, \tag{2}$$

откуда

$$f(\beta)-f(\alpha)-\frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha)-\frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2-\ldots-$$
$$-\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}-\omega(\beta-\alpha)^n=0\,. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$F(t)=f(\beta)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(\beta-t)-\frac{f''(t)}{2!}(\beta-t)^2-\ldots-$$
$$-\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(\beta-t)^{n-1}-\omega(\beta-t)^n\,. \tag{4}$$

Отметим, что:

1) $F(t)$ определена и непрерывна на промежутке $[\alpha,\beta]$, ибо на этом промежутке определены и непрерывны $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$.

2) $F(t)$ имеет конечную производную $F'(t)$ в промежутке (α,β), ибо

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{f''(t)}{1!}(\beta-t)+\frac{f''(t)}{1!}(\beta-t)-$$
$$-\frac{f'''(t)}{2!}(\beta-t)^2+\ \ldots\ +\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(\beta-t)^{n-2}-$$
$$-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(\beta-t)^{n-1}+n\omega(\beta-t)^{n-1}\,, \tag{5}$$

а $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$, $f^{(n)}(t)$ существуют конечные в (α,β) по условию. Из (5) после сокращения находим

$$F'(t)=-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(\beta-t)^{n-1}+n\omega(\beta-t)^{n-1}\,.$$

3) $F(\alpha)=F(\beta)=0$ ($F(\alpha)=0$ в силу (3); $F(\beta)=0$ — это очевидно из (4)).

Видим, что функция $F(t)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля. По этой теореме между точками α и β обязательно найдется хотя бы одна точка c такая, что будет: $F'(c)=0$, т. е.

$$-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(\beta-c)^{n-1}+n\omega(\beta-c)^{n-1}=0\,,$$

откуда $\omega=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Подставив полученное выражение для ω в соотношение (3), будем иметь

$$f(\beta)-f(\alpha)-\frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha)-\frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2-\ldots-$$
$$-\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}-\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(\beta-\alpha)^n=0, \tag{6}$$

откуда

$$f(\beta)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \tag{7}$$

У нас точки α и β — любые из $u_\rho(a)$.

Положим в (7) $\alpha=a$, $\beta=x$, $x\in u_\rho(a)$. Получим

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

где точка c есть некоторая точка, лежащая между точками a и x. ◀

Формула (1) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.* (Остаточным членом называют $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$).

Заметим, что остаточный член в форме Лагранжа напоминает очередной член формулы Тейлора; только n-я производная вычислена не в точке a, а в некоторой промежуточной точке c, лежащей между точками a и x.

Замечание. При выводе формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа мы предполагали, что функция $f(x)$ имеет в промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ конечные производные до порядка n включительно, из этого следовало, что сама функция $f(x)$ и ее последовательные производные до порядка $(n-1)$ включительно непрерывны в промежутке $(a-\rho, a+\rho)$. Что касается $f^{(n)}(x)$, то ее непрерывность не предполагалась. Потребуем теперь дополнительно, чтобы $f^{(n)}(x)$ была непрерывной хотя бы в точке a.

Так как точка c лежит между точками a и x, то $c \to a$, если $x \to a$. А тогда, в силу непрерывности $f^{(n)}(x)$ в точке a, будем иметь: $f^{(n)}(c) \underset{x\to a}{\to} f^{(n)}(a)$. Следовательно, можем написать $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $x \to a$. А тогда

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\alpha}{n!}(x-a)^n,$$

где $\alpha \to 0$ при $x \to a$. Заметим, что $\frac{\alpha}{n!}(x-a)^n$ при $x \to a$ представляет собой бесконечно малую величину более высокого порядка по сравнению с бесконечно малой величиной $(x-a)^n$, ибо

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{\alpha}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{n!} = 0$. Поэтому можно написать

$$\frac{\alpha}{n!}(x-a)^n = o\left((x-a)^n\right) \text{ при } x \to a.$$

Принимая во внимание все сказанное выше, будем иметь

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Формула (8) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Формулу (8) называют также *локальной формулой Тейлора.* Эта формула показывает, что, заменив $f(x)$ в окрестности точки a ее многочленом Тейлора

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

мы совершим ошибку, которая при $x \to a$ представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, чем $(x-a)^n$.

Замечание 1. В частном случае, когда $a = 0$, формулы Тейлора (1) и (8) называют *формулами Маклорена* с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано соответственно. Это будут следующие формулы:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n, \qquad (\tilde{1})$$

где $c \in (0, x)$;

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Замечание 2. Формула Тейлора имеет важные применения во многих вопросах математического анализа и его приложений. В частности, во многих случаях она позволяет функцию сложной природы с большой степенью точности заменить полиномом, т. е. функцией более простой; дает простой способ приближенного вычисления значений функции.

Замечание 3. Пусть $a = x_0$, $x - a = x - x_0 = \Delta x \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа запишется так:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)(\Delta x)^2 + \ldots + \\ + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(\Delta x)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta\Delta x)(\Delta x)^n,$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \ldots + \\ + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0) + \frac{1}{n!}d^n f(x_0 + \theta\Delta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

2. Примеры разложения по формуле Тейлора.

1. $f(x) = \sin x$. Напишем для этой функции формулу Маклорена. Имеем

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n \in \mathrm{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ если } \ n = 2k; \\ (-1)^k, \text{ если } \ n = 2k+1, \ k = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Согласно формуле $(\tilde{1})$, находим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \text{ при } x \to 0$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Мы записали здесь остаточный член в виде $o(x^{2n+2})$, а не в виде $o(x^{2n+1})$, так как следующий за последним выписанным слагаемым член формулы Маклорена равен нулю.

2. $f(x) = \cos x$. Напишем для этой функции формулу Маклорена. Имеем

$$f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ если } & n = 2k+1; \\ (-1)^k, \text{ если } & n = 2k \end{cases}$$

($k = 0, 1, 2, \ldots$). Согласно формуле $(\tilde{1})$, находим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \text{ при } x \to 0$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$).

3. $f(x) = e^x$. Получим для этой функции формулу Маклорена. Имеем

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1, \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Согласно формуле $(\tilde{1})$, находим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ при } x \to 0 \qquad (9)$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Заменяя в формуле (9) x на $(-x)$, получим

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ при } x \to 0 \qquad (10)$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$).

4. $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Вычитая из формулы (9) соответствующие части формул (10), получаем

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \text{ при } x \to 0$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Складывая соответствующие части формул (9) и (10), находим

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \text{ при } x \to 0 \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

5. $f(x) = (1+x)^m$ (m — любое, вещественное, не равное нулю). Получим для этой функции формулу Маклорена. Имеем

$$f(x) = (1+x)^m \Rightarrow f(0) = 1;$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \Rightarrow f'(0) = m;$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(0) = m(m-1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)](1+x)^{m-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)].$$

Согласно формуле $(\tilde{1})$, находим

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + o(x^n)$$

при $x \to 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

6. $f(x) = \ln(1+x)$. Получим для этой функции формулу Маклорена. Имеем

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2!;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Согласно формуле ($\tilde{1}$), находим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \text{ при } x \to 0$$

($n = 1, 2, \ldots$).

3. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (метод выделения главной части функции).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

▶ Имеем $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$ при $x \to 0$; $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} +$ $+ \dfrac{t^3}{3!} + o(t^3)$ при $t \to 0 \Rightarrow$ при $t = -\dfrac{x^2}{2}$ находим

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^5) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5) \text{ при } x \to 0.$$

А тогда

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8}\right) + o(x^5) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^5) \text{ при } x \to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^5)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12} + o(x)}{1} = -\frac{1}{12}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - (1+x)x}{x^3}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

▶ Имеем

$$e^x \sin x - (1+x)x =$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - x - x^2 =$$

$$= \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - x - x^2 =$$

$$= \frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

при $x \to 0$. А тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-(1+x)x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$.

$\blacktriangleright$ Имеем $x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)$.

Делаем замену $\frac{1}{x}=y \Rightarrow y\to +0$, если $x\to+\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=\lim_{y\to+0}\frac{(1+y)^{1/2}+(1-y)^{1/2}-2}{y^2}.$$

Имеем

$$(1+y)^{1/2}=1+\frac{1}{2}y+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2+o(y^2)=$$

$$=1+\frac{y}{2}-\frac{1}{8}y^2+o(y^2) \qquad \text{при } y\to 0,$$

$$(1-y)^{1/2}=1-\frac{1}{2}y+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2+o(y^2)=1-\frac{y}{2}-\frac{1}{8}y^2+o(y^2) \text{ при } y\to 0.$$

$$(1+y)^{1/2}+(1-y)^{1/2}-2=-\frac{1}{4}y^2+o(y^2) \text{ при } y\to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{y\to+0}\frac{(1+y)^{1/2}+(1-y)^{1/2}-2}{y^2}=\lim_{y\to+0}\frac{-\frac{1}{4}y^2+o(y^2)}{y^2}=-\frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

▶ Имеем $\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/6}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/6}\right]$. Делаем замену $\frac{1}{x}=y\Rightarrow y\to+0$, если $x\to+\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/6}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/6}\right]=\lim_{y\to+0}\frac{(1+y)^{1/6}-(1-y)^{1/6}}{y}.$$

Имеем

$$(1+y)^{1/6}=1+\frac{1}{6}y+\frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}-1\right)}{2!}y^2+o(y^2)\ \text{ при }\ y\to+0;$$

$$(1-y)^{1/6}=1-\frac{1}{6}y+\frac{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}-1\right)}{2!}y^2+o(y^2)\ \text{ при }\ y\to+0;$$

$$(1+y)^{1/6}-(1-y)^{1/6}=\frac{1}{3}y+o(y^2)\ \text{ при }\ y\to+0.$$

Поэтому

$$\lim_{y\to+0}\frac{(1+y)^{1/6}-(1-y)^{1/6}}{y}=\lim_{y\to+0}\frac{\frac{1}{3}y+o(y^2)}{y}=\frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

▶ Имеем

$$\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}=$$

$$=x^3\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{1/2}\right].$$

Положим $\dfrac{1}{x} = y \Rightarrow y = +0$, если $x \to +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left[\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{1/2}\right]=$$

$$=\lim_{y\to+0}\frac{\left(1-y+\dfrac{1}{2}y^2\right)e^y-(1+y^6)^{1/2}}{y^3}.$$

Имеем

$$\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right)e^y=\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+o(y^3)\right)=$$

$$=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-y-y^2-\frac{y^3}{2!}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^3+o(y^3)=$$

$$=1+\frac{1}{6}y^3+o(y^3) \text{ при } y\to+0.$$

$$(1+y^6)^{1/2}=1+\frac{1}{2}y^6+o(y^6) \text{ при } y\to+0.$$

$$\left(1-y+\frac{1}{2}y^2\right)e^y-(1+y^6)^{1/2}=$$

$$=1+\frac{1}{6}y^3-1+o(y^3)=\frac{1}{6}y^3+o(y^3) \text{ при } y\to+0.$$

Значит,

$$\lim_{y\to+0}\frac{\left(1-y+\dfrac{1}{2}y^2\right)e^y-(1+y^6)^{1/2}}{y^3}=\lim_{y\to+0}\frac{\dfrac{1}{6}y^3+o(y^3)}{y^3}=\frac{1}{6}. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$\blacktriangleright$ Имеем

$$f(x)=a^x+a^{-x}-2\Rightarrow f(0)=0;$$

$$f'(x)=a^x\ln a-a^{-x}\ln a\Rightarrow f'(0)=\ln a-\ln a=0;$$

$$f''(x)=a^x(\ln a)^2+a^{-x}(\ln a)^2\Rightarrow f''(0)=2(\ln a)^2.$$

А тогда

$$a^x + a^{-x} - 2 = \frac{2}{2!}(\ln a)^2 x^2 + o(x^2) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\ln a)^2 + o(x^2)}{x^2} = (\ln a)^2. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$.

$\blacktriangleright$ Имеем $\left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = x^2\left[\frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$. Положим $\frac{1}{x} = y \Rightarrow$ $\Rightarrow y \to 0$, если $x \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left[\frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\frac{y - \ln(1+y)}{y^2}.$$

Имеем

$$y - \ln(1+y) = y - \left(y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) = \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{при} \quad y \to 0.$$

А тогда

$$\lim_{y\to 0}\frac{y - \ln(1+y)}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^2}{2} + o(y^2)}{y^2} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

$\blacktriangleright$ Имеем $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$;

$$\sin x - x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^4) \sim -\frac{x^3}{6} \quad \text{при} \quad x \to 0;$$

$$x \sin x \sim x^2 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

А тогда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}x\right) = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$.

▶ Имеем

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x};$$

$$\sin x-x\cos x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right)=$$

$$=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}+o(x^4)=\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\sim\frac{1}{3}x^3 \text{ при } x\to 0;$$

$$x^2\sin x\sim x^3 \text{ при } x\to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

▶ Имеем

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3!}\sin^3 x+\frac{1}{5!}\sin^5 x+o(x^6)=$$

$$=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)^3+$$

$$+\frac{1}{120}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)^5+o(x^6)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\sin x)=\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\right)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^6)\right)+$$

$$+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^6) \text{ при } x\to 0;$$

$$x\sqrt[3]{1-x^2}=x(1-x^2)^{1/3}=x\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^4+o(x^5)\right)=$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^6);$$

$$\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}=\frac{19}{90}x^5+o(x^6)\sim\frac{19}{90}x^5 \text{ при } x\to 0.$$

А тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{19}{90}x^5}{x^5}=\frac{19}{90}. \blacktriangleleft$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

$\blacktriangleright$ Имеем

$$(\cos x)^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln\cos x}=1+\sin x\cdot\ln\cos x+o(x^3)$$

при $x\to 0$, ибо $\sin x\sim x$, $\ln\cos x\sim-\frac{x^2}{2}$ при $x\to 0$;

$1-(\cos x)^{\sin x}=-\sin x\cdot\ln\cos x+o(x^3)\sim-\sin x\cdot\ln\cos x$ при $x\to 0$.

А тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x\cdot\ln\cos x}{x^3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(+\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}\right)=+\frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)-x}{x^3}$.

$\blacktriangleright$ Имеем $\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}x+\frac{1}{3!}(\operatorname{tg}x)^3+o(x^4)$ при $x\to 0$, ибо $\operatorname{tg}x\sim x$ при $x\to 0$. Так как $\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ при $x\to 0$, то

$$\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)=\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3+o(x^4)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=x+\frac{1}{2}x^3+o(x^3).$$

Поэтому

$$\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)-x=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\sim\frac{1}{2}x^3 \text{ при } x\to 0.$$

А тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

§ 10. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

Под раскрытием неопределенностей понимают вычисление пределов функций в некоторых особых, но часто встречающихся случаях.

Пусть, например, речь идет о вычислении

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

в случаях, когда $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$ одновременно стремятся либо к нулю, либо к бесконечности. Непосредственное применение правила вычисления предела дроби здесь невозможно. Формальное же применение этого правила приводит к символу $\frac{0}{0}$ или, соответственно, $\frac{\infty}{\infty}$. В связи с этим говорят, что отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ в этих случаях представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или, соответственно, $\frac{\infty}{\infty}$.

В этом параграфе мы дадим некоторые общие правила для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, носящих общее название правил Лопиталя. Будут показаны также приемы, позволяющие сводить неопределенности вида $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) определены в промежутке (a,b) (a — конечное число, $a < b$);

2) имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ в (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ для $x \in (a,b)$;

3) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$.

Тогда, если существует конечный или бесконечный (определенного знака) предел

$$l = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то к тому же пределу l при $x \to a+0$ стремится и отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ (т. е. $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$).

▶ Из условия 1) теоремы следует, что функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены в точке a. Доопределим эти функции в точке a, положив $f(a) = 0$, $g(a) = 0$. Возьмем любое x из промежутка (a,b) ($a < x < b$). Ясно, что теперь на промежутке $[a,x]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши. Поэтому для каждого x из промежутка (a,b) между точками a и x существует точка c такая, что имеет место равенство

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

ибо у нас $f(a) = g(a) = 0$. Так как точка c лежит между точками a и x, то $c \to a+0$, если $x \to a+0$.

В соотношении $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ перейдем к пределу при $x \to a+0$. Получим

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a+0 \\ (c \to a+0)}} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

По условию $\lim\limits_{c \to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ существует и равен l (l — конечное число или бесконечность определенного знака). Но тогда и $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. ◀

Замечание. В теореме 1 речь шла о правостороннем пределе отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точке a. Отметим, что совершенно аналогичные утверждения остаются справедливыми в случаях, когда речь идет о левостороннем или двустороннем пределе отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точке a.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

▶ Здесь $f(x)=a^x-b^x$; $g(x)=x$. Ищем предел отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to 0$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=$

$=\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$. Значит, и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\ln\dfrac{a}{b}$. ◀

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2-3x+2}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

▶ Здесь $f(x)=\ln(x^2-3)$; $g(x)=x^2-3x+2$. Ищем предел отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to 2$. Имеем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{(x^2-3)(2x-3)}=4$. Значит, и $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2-3x+2}=4$. ◀

Замечание. Может случиться, что отношение производных опять приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Но к отношению производных можно снова применить установленное правило (если, конечно, выполнены условия его применимости), т. е. перейти к отношению вторых производных. Если и здесь получается неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то переходим к отношению третьих производных и т. д. Если на каком-то шаге мы получим предел, который сможем вычислить, то найденное его значение и будет искомым пределом отношения функций.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

▶ Здесь $f(x)=x-\sin x$, $g(x)=x^3$. Ищем предел отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to 0$. Имеем $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$. Видим, что отношение производных при $x\to 0$ снова представляет собой неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Ищем тогда предел отношения вторых производных $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ при $x\to 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

Значит, и

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$ ◀

Замечание. Если не существует предел отношения производных, то это вовсе не означает, что не существует и предел отношения самих функций.

Например, пусть $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. Это отношение представляет собой при $x\to 0$ неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Имеем

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\cdot\sin\frac{1}{x}-x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, так как не существует $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$. Однако

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0,$$

ибо $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)=0$, а функция $\sin\dfrac{1}{x}$ — ограниченная.

Теорема 2. Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $(b,+\infty)$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на промежутке $(b,+\infty)$, причем $g'(x)\neq 0$ для $x\in(b,+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Тогда, если существует конечный или бесконечный (определенного знака) предел

$$l=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то к тому же пределу l при $x\to+\infty$ стремится и отношение самих функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$).

▶ Не умаляя общности, можно считать, что $b>0$ (если $b<0$, то в качестве нового значения b можно взять любое число, например, большее или равное 1; в новом промежутке $(b,+\infty)$ условия теоремы сохраняются).

Сделаем замену переменной, положив $x=\dfrac{1}{t}$ ($\Rightarrow$ $t=\dfrac{1}{x}$). Тогда:

1) $t\to+0$, если $x\to+\infty$; 2) функции $\varphi(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $\psi(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ определены на промежутке $\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$; 3) на промежутке $\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$ существуют конечные производные $\varphi_t'(t)=-f_x'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\dfrac{1}{t^2}$; $\psi_t'(t)=-g_x'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\dfrac{1}{t^2}$, причем $\psi_t'(t)\neq 0$ для $t\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$; 4) $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)=\lim\limits_{t\to+0}f\left(\dfrac{1}{t}\right)=0$;

$\lim\limits_{t\to+0}\psi(t)=\lim\limits_{t\to+0}g\left(\frac{1}{t}\right)=0$. Видим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на промежутке $\left(0,\ \frac{1}{b}\right)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Покажем еще, что из существования предела $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ следует существование предела $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ и равенство его l. В самом деле, имеем:

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{-f'_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}}{-g'_x\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+0}\frac{f'_x\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

Теперь из теоремы 1, примененной к функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, следует, что $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=l$. Но $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\frac{f(x)}{g(x)}$, где $x=\frac{1}{t}$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=l. \blacktriangleleft$$

Замечание. В теореме 2 речь шла о пределе отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to+\infty$. Эта теорема остается верной с соответствующим видоизменением и при $x\to-\infty$.

2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Лемма. Пусть имеются два числа l и ε, причем $\varepsilon>0$, и пусть имеются две переменные u_n и v_n. Пусть $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, а переменная u_n такая, что для всех n, начиная с некоторого места (например, для $n>N_1$, $N_1\in\mathbb{N}$), оказывается

$$|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Тогда существует номер N такой, что для $n > N$ будет:

$$|u_n v_n - l| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Заметим, что здесь не утверждается, что $u_n v_n \underset{n\to\infty}{\to} l$, ибо неравенство (2) имеет место лишь для нашего определенного числа ε, а не для всякого $\varepsilon > 0$.

▶ По условию $v_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$. Значит, $v_n = 1 + \alpha_n$, где $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Имеем

$$u_n v_n = u_n(1+\alpha_n) = u_n + u_n\alpha_n \Rightarrow u_n v_n - l = (u_n - l) + u_n\alpha_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |u_n v_n - l| \le |u_n - l| + |u_n\alpha_n| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |u_n v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + |u_n\alpha_n|, \quad \text{если} \quad n > N_1. \qquad (3)$$

У нас $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а u_n — ограниченная переменная. Поэтому $u_n\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, любому $\varepsilon > 0$ (в частности, и нашему ε) будет отвечать номер N (можно считать $N > N_1$) такой, что будет $|u_n\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, если $n > N$. Но тогда из неравенства (3) следует, что при $n > N$ будет $|u_n v_n - l| < \varepsilon$. Лемма доказана. ◀

Теорема. Пусть:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в (a,b) (a — конечное, $a < b$);

2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ в (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ для $x \in (a,b)$;

3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$.

Тогда, если существует конечный или бесконечный (определенного знака) предел

$$l = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то к тому же пределу l при $x \to a+0$ стремится и отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ (т. е. $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$).

▶ I. Рассмотрим сначала случай, когда l — конечное число. Возьмем последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — любую, но такую, что $x_n \in (a,b)$ и $x_n \to a$. Теорема (в обсуждаемом случае) будет доказана, если мы покажем, что соответствующая последовательность

$\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \underset{n\to\infty}{\to} l$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое, сколь угодно малое. По условию

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Это означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta > 0$ такое, что как только $x \in (a, a+\delta)$, так сейчас же

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

У нас $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Поэтому числу $\delta > 0$ (найденному по числу $\varepsilon > 0$) будет отвечать номер N_1 такой, что как только $n > N_1$, так сейчас же $x_n \in (a, a+\delta)$. Возьмем номера m и n такие, что $m > N_1$ и $n > N_1$. Ясно, что $x_m \in (a, a+\delta)$ и $x_n \in (a, a+\delta)$. Замечаем, что в промежутке $[x_n, x_m]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши. По этой теореме можем написать

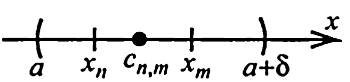


Рис. 4.22

$$\frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{f'(c_{n,m})}{g'(c_{n,m})}. \qquad (5)$$

Здесь точка $c_{n,m}$ есть некоторая точка, лежащая между точками x_n и x_m. Ясно, что точка $c_{n,m} \in (a, a+\delta)$. А тогда, в силу (4), будем иметь

$$\left|\frac{f'(c_{n,m})}{g'(c_{n,m})} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

Возьмем любое m, удовлетворяющее условию $m > N_1$ и закрепим. Обозначим

$$\frac{f'(c_{n,m})}{g'(c_{n,m})} = u_n. \qquad (7)$$

(Так как m закреплено, то закреплена точка x_m. Значит, положение точки $c_{n,m}$ в промежутке $(a, a+\delta)$ станет зависеть только от положения точки x_n в этом промежутке.) Принимая во внимание (7), запишем соотношение (5) в виде

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)}=u_n \Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}=u_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)}=u_n\cdot v_n,$$

где положено $v_n=\dfrac{1-\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)}}$. Станем неограниченно увеличивать n.

У нас $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Следовательно, в силу условия 3) теоремы $g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ и $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. А тогда $\dfrac{g(x_m)}{g(x_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\dfrac{f(x_m)}{f(x_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (важно, что m закреплено, значит, $g(x_m)$ и $f(x_m)$ — определенные числа). Следовательно, будем иметь $v_n \to 1$ при $n\to\infty$. Из неравенства (6) следует, что $|u_n-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, если $n>N_1$. Видим, таким образом, что переменные u_n и v_n удовлетворяют условиям леммы. А тогда по лемме утверждаем, что существует номер N ($N>N_1$) такой, что при $n>N$ будет

$$|u_nv_n-l|<\varepsilon, \text{ т. е. } \left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}-l\right|<\varepsilon.$$

Итак, получили: любому, сколь угодно малому $\varepsilon>0$ отвечает номер N такой, что при всех $n>N$ оказывается

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}-l\right|<\varepsilon.$$

Это означает, что $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

II. Рассмотрим теперь случай, когда предел $l=\infty$. Пусть для определенности $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$. Но тогда $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=0$. (Ясно, что $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}$ — положительная бесконечно малая величина при $x\to a+0$.) Видим, что мы пришли к уже рассмотренному выше случаю конечного предела. Следовательно, и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

А тогда $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ (можно доказать, что $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$). ◀

Замечание. В доказанной теореме речь шла о пределе отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a+0$. Эта теорема остается верной с соответствующими видоизменениями и при $x\to a-0$, $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, а также в случае двусторонних пределов.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

▶ Здесь $f(x)=\ln x$; $g(x)=x^{\alpha}$. Ищем предел отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to+\infty$. Имеем

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0.$$

Значит, и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$. ◀

Вывод. При $x\to+\infty$ функция $f(x)=\ln x$ растет медленнее, чем любая положительная степень переменной x.

Замечание. Может оказаться, что отношение производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ опять приводит к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. В этом случае к отношению производных можно снова применить установленное правило (если, конечно, выполнены условия его применимости), т. е. перейти к отношению вторых производных. Если и здесь получается неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, то переходим к отношению третьих производных и т. д. Если на каком-то шаге мы получим предел, который сможем вычислить, то найденное его значение и будет искомым пределом отношения функций $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $a > 1$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

▶ Здесь $f(x) = x^n$, $g(x) = a^x$. Ищем предел отношения производных $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to +\infty$. Имеем $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a}$. Если $n > 1$, то $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ представляет при $x \to +\infty$ снова неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поэтому переходим к отысканию предела отношения при $x \to +\infty$ вторых производных и т. д. В этом примере на n-м шаге получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0.$$

Значит, и

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0. \blacktriangleleft$$

Вывод. При $x \to +\infty$ $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ растет медленнее, чем показательная функция a^x ($a > 1$).

3. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Отметим, что все эти символы не следует понимать буквально — это лишь символическая запись, характеризующая особенности различных случаев. Все они легко сводятся к случаям $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Общих рецептов действий для раскрытия неопределенностей $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$,

0^0, ∞^0, 1^∞ мы здесь устанавливать не будем. Целесообразнее приноравливаться к условиям конкретных примеров, к которым мы и перейдем.

Случай: $0\cdot\infty$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to+0}(x\cdot\ln x)$ $(0\cdot\infty)$.

▶ Имеем $\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$ $(\dfrac{\infty}{\infty};\ f(x)=\ln x;\ g(x)=\dfrac{1}{x})$.

Ищем предел отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to+0$. Имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

Вывод: $\lim\limits_{x\to+0}(x\ln x)=0$. ◀

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x)$ $(0\cdot\infty)$.

▶ Имеем $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}$ $(\dfrac{\infty}{\infty};\ f(x)=\ln\sin x;$ $g(x)=\operatorname{ctg}x)$. Ищем предел отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to+0$. Имеем

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{-\cos x\cdot\sin^2 x}{\sin x}=-\lim_{x\to+0}(\cos x\cdot\sin x)=0.$$

Вывод: $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x)=0$. ◀

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[\operatorname{tg}2x\cdot(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)]$ $(\infty\cdot 0)$.

▶ Имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[\operatorname{tg}2x\cdot(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}2x}$ $(\dfrac{0}{0};\ f(x)=$ $=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x;\ g(x)=\operatorname{ctg}2x)$. Ищем предел отношения производных при $x\to\dfrac{\pi}{4}$. Имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2}=-2.$$

Вывод: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[\operatorname{tg}2x\cdot(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)]=-2$. ◀

Случай: $\infty-\infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$ $(\infty-\infty)$.

▶ Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$;

$$\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{(\sin x+x\cos x)}{\sin x}\cdot\frac{(\sin x-x\cos x)}{x^2\sin x}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=2,$$

то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$ $(\frac{0}{0}$, $f(x)=\sin x-x\cos x$; $g(x)=x^2\sin x$). Ищем предел отношения производных $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x}=\frac{1}{3}.$$

Вывод: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=\frac{2}{3}$. ◀

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)$ $(\infty-\infty)$.

▶ Имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ $\left(\frac{0}{0};\ f(x) = 1 - \sin x;\right.$ $\left.g(x) = \cos x\right)$. Ищем предел отношения производных $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Вывод: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \operatorname{tg} x) = 0$. ◀

Случаи: 0^0; ∞^0; 1^∞.

Неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞ приводятся к случаю $0\cdot\infty$ с помощью логарифмирования.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$ (0^0).

▶ Полагаем $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$. Имеем $\lim\limits_{x\to+0} \ln y = \lim\limits_{x\to+0}(x \cdot \ln x)$ $(0\cdot\infty)$; $\lim\limits_{x\to+0}(x \ln x) = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+0}(x\ln x) = 0$ (см. пример 1). Таким образом, $\lim\limits_{x\to+0} \ln y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+0} y = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$. ◀

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ (∞^0).

▶ Полагаем $y = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right);$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2x+1}$, $g(x) = x$. Ищем предел отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos^2\dfrac{\pi x}{2x+1}} \cdot \frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sin\dfrac{2\pi x}{2x+1}} \cdot \frac{2\pi}{(2x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\pi}{(2x+1)^2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\pi - \dfrac{2\pi x}{2x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\pi}{(2x+1)^2} \cdot \frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\pi(2x+1)}{\pi(2x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2x+1} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$. ◀

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$ $\left(a \neq \dfrac{k\pi}{2}, k - \text{целое}\right)$ (1^∞).

▶ Полагаем $y = \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} \Rightarrow \ln y = \operatorname{ctg}(x-a)\cdot \ln\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}$;

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \operatorname{ctg}(x-a)\cdot \ln\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \; (\infty\cdot 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \frac{\ln\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}}{\operatorname{tg}(x-a)} \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left[1 + \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} - 1\right)\right]}{x-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} - 1}{x-a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}\cdot \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a} \quad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Положим $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a$; $g(x) = x - a$. Следовательно,

$$\lim_{x \to a} \ln y = \frac{1}{\operatorname{tg} a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Ищем предел отношения производных $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to a$. Имеем

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 a},$$

а тогда $\lim\limits_{x \to a} \ln y = \dfrac{2}{\sin 2a}$, откуда $\lim\limits_{x \to a} y = e^{\frac{2}{\sin 2a}}$. ◀

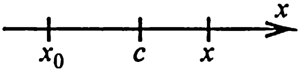
§ 11. Признаки постоянства, возрастания и убывания функций

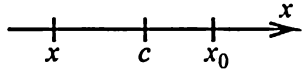
Теорема 1 (признак постоянства функции). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке X и имеет внутри этого промежутка конечную производную $f'(x)$. Для того, чтобы $f(x)$ имела в промежутке X постоянное значение, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках x, лежащих внутри X, было: $f'(x) = 0$.

▶ *Необходимость.* Пусть $f(x) \equiv \text{const}$, $x \in X$. Тогда для любого x, лежащего внутри X, будет

$$f'(x) = 0.$$

Достаточность. Дано: $f'(x) = 0$ для всех x, лежащих внутри X. Требуется доказать, что $f(x) \equiv \text{const}$, $x \in X$. Возьмем в промежутке X любую точку x_0 и закрепим ее. Пусть x — любая другая точка из промежутка X.





Замечаем, что в промежутке $[x_0, x]$ функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа. Но тогда между точками x_0 и x обязательно найдется точка c такая, что будет

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \tag{1}$$

Так как точка c лежит между точками x_0 и x, то точка c лежит внутри промежутка X. По условию $f'(x) = 0$ для всех x, лежащих внутри X. Значит, в частности, $f'(c) = 0$. А тогда из (1) получаем $f(x) - f(x_0) = 0$, т. е.

$$f(x) = f(x_0). \tag{2}$$

Так как в соотношении (2) точка x — любая из промежутка X, то заключаем, что $f(x) \equiv \text{const}$, $x \in X$. ◀

Следствие. Пусть имеются две функции $f(x)$ и $g(x)$, и пусть:

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в промежутке X;

2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют внутри промежутка X конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$;

3) во всех точках x внутри промежутка X: $f'(x) = g'(x)$.

Тогда во всем промежутке X функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются друг от друга на постоянную величину.

▶ Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Имеем:

1) $\varphi(x)$ определена и непрерывна в промежутке X;

2) $\varphi(x)$ имеет внутри X конечную производную $\varphi'(x)$;

3) во всех точках x внутри X: $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.

Видим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Следовательно, $\varphi(x) \equiv \text{const}$, $x \in X$, т. е. $f(x) - g(x) \equiv \text{const}$, $x \in X$. ◀

Пример. Пусть имеются две функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и $g(x) = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $X = (-\infty, +\infty)$. Имеем:

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на промежутке X;

2) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Видим, что $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют конечные для $x \in (-\infty, +\infty)$ и что $f'(x) = g'(x)$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Значит, $f(x)$ и $g(x)$ отличаются друг от друга на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$ на постоянную величину, т. е.

$$\operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \equiv \text{const}, x \in (-\infty, +\infty).$$

Для определения значения этой постоянной величины, положим в полученном тождестве, например, $x = 0$. Получим $\text{const} = 0$.

Следовательно, $\operatorname{arctg} x - \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \equiv 0$, т. е. $\operatorname{arctg} x \equiv \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in X$. ◀

Теорема 2 (признак возрастания и убывания функции в широком смысле). Пусть:

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X;

2) $f(x)$ имеет внутри промежутка X конечную или бесконечную (определенного знака) производную $f'(x)$.

При этих условиях.

I. Для того, чтобы $f(x)$ была возрастающей (в широком смысле) в промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы для всех x внутри X было: $f'(x) \geq 0$.

II. Для того, чтобы $f(x)$ была убывающей (в широком смысле) в промежутке X, необходимо и достаточно, чтобы для всех x внутри X было: $f'(x) \leq 0$.

▶ Докажем утверждение I (утверждение II доказывается аналогично).

Необходимость. Дано: функция $f(x)$ в промежутке X возрастает (в широком смысле). Требуется доказать, что $f'(x) \geq 0$ внутри промежутка X.

Возьмем внутри промежутка X любую точку x. Дадим этому x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $x + \Delta x \in X$.

Если $\Delta x > 0$, то $x + \Delta x > x$, а значит, $f(x+\Delta x) \geq f(x)$, т. е. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$. Но тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, и, следовательно,

$\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, т. е. $f'_+(x) \geq 0$.

Если $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$, а значит, $f(x+\Delta x) \leq f(x)$, $\Rightarrow$ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \leq 0$. Но тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, и, следовательно,

$\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, т. е. $f'_-(x) \geq 0$.

По условию в точке x существует производная функции $f(x)$ в обычном смысле. Следовательно, $f'(x) = f'_+(x)$ $(= f'_-(x))$. Значит, $f'(x) \geq 0$. Так как точка x была любой, лежащей внутри X, то заключаем, что $f'(x) \geq 0$ внутри промежутка X.

- - -

Достаточность. Дано: $f'(x) \geq 0$ внутри промежутка X. Требуется доказать, что $f(x)$ возрастает (в широком смысле) в промежутке X.

В промежутке X возьмем две точки x_1 и x_2 — любые, но такие, что $x_1 < x_2$. Рассмотрим промежуток $[x_1, x_2]$. Заметим, что $[x_1, x_2] \subset X$ и что на промежутке $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. ($f(x)$ определена и непрерывна на $[x_1, x_2]$ и имеет в промежутке (x_1, x_2) конечную или бесконечную определенного знака производную $f'(x)$.) По теореме Лагранжа, имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где c — некоторая точка из (x_1, x_2). Так как по условию $f'(c) \geq 0$ и так как $(x_2 - x_1) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, т. е. $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Итак, для любых двух точек x_1 и x_2 из X, из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$. Значит, функция $f(x)$ возрастает (в широком смысле) в промежутке X. ◀

Пример 1. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in [-1, 0]; \\ x^2, & \text{если} \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$ Имеем $f'(x) = 0$ для $x \in (-1, 0)$; $f'(x) = 2x$ для $x \in (0, 1)$; $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$. Видим, что $f'(x)$ существует, конечная в промежутке $(-1, 1)$ и что $f'(x) \geq 0$, $x \in (-1, 1)$.

Вывод: функция $f(x)$ в промежутке $[-1, 1]$ возрастает (в широком смысле).

Теорема 3 (признак строгого возрастания и строгого убывания функции). Пусть:

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X;

2) $f(x)$ имеет внутри промежутка X конечную или бесконечную (определенного знака) производную $f'(x)$.

При этих условиях.

I. Для того, чтобы $f(x)$ была строго возрастающей в промежутке X, необходимо и достаточно выполнение еще следующих двух условий:

а) для всех x внутри X должно быть $f'(x) \geq 0$;

б) внутри X не существует такого интервала (p, q), во всех точках которого $f'(x) = 0$.

II. Для того, чтобы $f(x)$ была строго убывающей в промежутке X, необходимо и достаточно выполнение еще следующих двух условий:

а) для всех x внутри X должно быть $f'(x) \leq 0$;

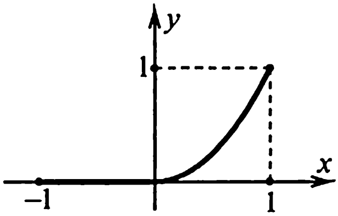


Рис. 4.23

б) внутри X не существует такого интервала (p,q), во всех точках которого $f'(x)=0$.

Докажем утверждение I (утверждение II доказывается аналогично).

▶ *Необходимость.* Дано: функция $f(x)$ строго возрастающая в промежутке X. Требуется доказать необходимость выполнения условий а) и б).

Необходимость условия а) показывается так же, как и при доказательстве теоремы 2. Установим необходимость условия б).

Предположим, что условие б) не выполнено. Но тогда внутри X существует промежуток (p,q), во всех точках которого $f'(x)=0$ и, следовательно, по теореме 1 будет $f(x)=\text{const}$ для $x\in[p,q]$, т. е. $f(x)$ не будет строго возрастающей в промежутке X (ибо, например, $p<q$, а $f(p)=f(q)$).

Вывод: выполнение условия б) необходимо для строгого возрастания функции $f(x)$ в промежутке X.

Достаточность. Дано: для функции $f(x)$ выполнены условия а) и б). Требуется доказать, что $f(x)$ строго возрастающая в промежутке X.

Если выполнено условие а), то по теореме 2 функция $f(x)$ возрастает (по крайней мере, в широком смысле) в промежутке X. Надо показать теперь, что выполнение еще и условия б) обеспечивает строгое возрастание $f(x)$ в промежутке X.

Рассуждаем от противного. Предположим, что несмотря на выполнение условий а) и б) в промежутке X имеются точки x_1 и x_2 (пусть, для определенности, $x_1<x_2$) такие, что $f(x_1)=f(x_2)$. Возьмем любое x, удовлетворяющее условию: $x_1<x<x_2$. Так как $f(x)$ по условию а) возрастает (по крайней мере, в широком смысле) в промежутке X, то из неравенства $x_1<x<x_2$ следует неравенство

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2). \qquad (*)$$

Так как, по предположению, $f(x_1)=f(x_2)$, то из соотношения (*) следует, что $f(x)=\text{const}$ для всех $x\in[x_1,x_2]$. Но тогда, по теореме 1, $f'(x)=0$, для всех $x\in(x_1,x_2)$. У нас, по условию, внутри промежутка X не может существовать интервала (x_1,x_2), во всех точках которого $f'(x)=0$. Следовательно, получили противоречие. Значит, предположение, что $f(x_1)=f(x_2)$ неверно. Отсюда заключаем, что должно быть $f(x_1)<f(x_2)$. ◀

Пример. Пусть $f(x)=(x-5)^{1/3}$, $x\in(-\infty,+\infty)$. Имеем $f'(x)=$ $=\dfrac{1}{3(x-5)^{2/3}}$ для $x\in(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$ и $f'(5)=+\infty$. Видим, что

$f'(x)$ существует конечная или бесконечная (определенного знака) для $x \in (-\infty, +\infty)$ и что $f'(x) > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ($f'(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $(-\infty, +\infty)$.)

Вывод: функция $f(x)$ строго возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$ (рис. 4.24).

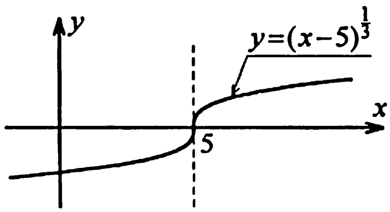


Рис. 4.24

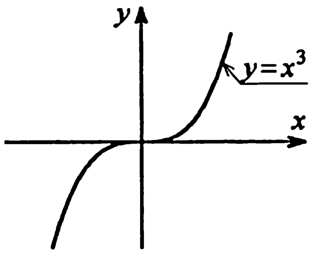


Рис. 4.25

Замечание. Не следует думать, что при строгом возрастании (или строгом убывании) функции $f(x)$ в промежутке X будет обязательно $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$) во всех точках внутри промежутка X. Например, функция $y = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (рис. 4.25) строго возрастает на всем бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, и тем не менее $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

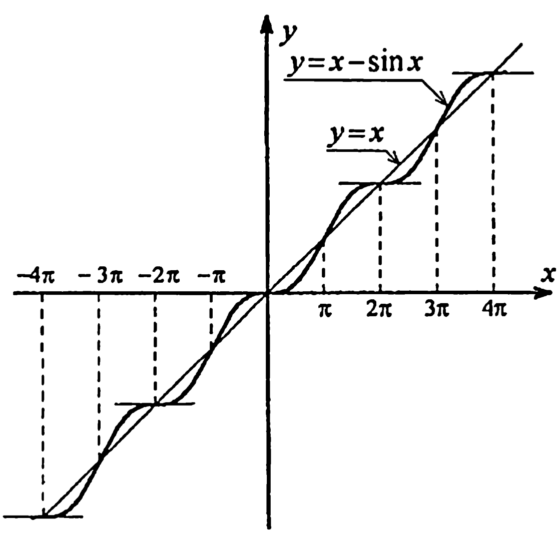


Рис. 4.26

И для строго возрастающих, и для строго убывающих функций $f(x)$ производная $f'(x)$ в отдельных точках может обращаться в нуль (но именно в отдельных точках, не заполняющих никакого, хотя бы и малого промежутка).

Пример. Пусть $f(x)=x-\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$. Имеем $f'(x)=$ $=1-\cos x \Rightarrow f'(x)\geq 0$, для всех $x\in(-\infty,+\infty)$, причем $f'(x)$ обращается в нуль лишь при $x=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т. е. в точках, не заполняющих сплошь никакого промежутка.

Вывод: функция $f(x)=x-\sin x$ строго возрастающая в промежутке $(-\infty,+\infty)$ (рис. 4.26).

§ 12. Теория экстремальных значений функции

1. Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором промежутке X и пусть точка x_0 есть внутренняя точка промежутка X.

I. Если существует δ-окрестность $u_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $u_\delta(x_0)\subset X$ и что для всех $x\in u_\delta(x_0)$ оказывается

$$f(x)\leq f(x_0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум*. Если при этом для всех $x\in \mathring{u}_\delta(x_0)$ оказывается

$$f(x)<f(x_0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий максимум*.

II. Если существует δ-окрестность $u_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $u_\delta(x_0)\subset X$ и что для всех $x\in u_\delta(x_0)$ оказывается

$$f(x)\geq f(x_0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *минимум*. Если при этом для всех $x\in \mathring{u}_\delta(x_0)$ оказывается

$$f(x)>f(x_0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий минимум*.

Из этих определений следует, что понятия “максимум” и “минимум” имеют локальный характер. У функции $y=f(x)$ в промежутке X может быть несколько максимумов и минимумов.

На рис. 4.27 изображен график функции, имеющей два максимума и два минимума.

Не следует поэтому путать понятия максимума и минимума функции $f(x)$ с понятиями наибольшего и наименьшего значения этой функции на всем промежутке X.

Если высказанные выше определения применить к точке, являющейся концом промежутка X, то мы придем к понятиям *краевого максимума* и *краевого минимума* функции $f(x)$. Функция $f(x)$, график которой изображен на рис. 4.27, имеет в точке a краевой минимум, а в точке b — краевой максимум.

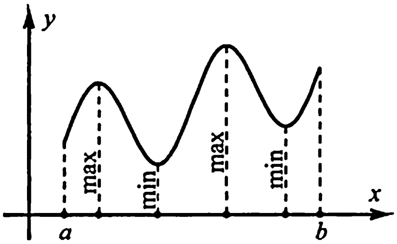


Рис. 4.27

С точки зрения теории вопроса, случай максимума или минимума функции во внутренней точке промежутка X существенно отличен от случая краевого максимума или минимума. Поэтому эти случаи мы строго различаем. Всюду в дальнейшем мы будем заниматься лишь некраевыми максимумами и минимумами. Дело в том, что наша конечная цель — это отыскание наибольшего и наименьшего значений функции в промежутке, а эта задача для своего решения не требует специального изучения случая краевого максимума или минимума.

Вместо отдельных наименований "максимум" и "минимум" употребляют объединяющее их наименование — "экстремум".

Теорема 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в промежутке X и во внутренней точке $x_0 \in X$ имеет экстремум. Тогда, если у функции $f(x)$ в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$, то обязательно $f'(x_0)=0$.

▶ Пусть для определенности функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум. Но тогда существует δ-окрестность $u_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $u_\delta(x_0) \subset X$ и для всех $x \in u_\delta(x_0)$:

$$f(x) \le f(x_0). \qquad (1)$$

Дадим x_0 приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \ne 0$ и точка $x_0+\Delta x \in u_\delta(x_0)$. В силу соотношения (1) ясно, что

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \le 0.$$

Если $\Delta x < 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$, т. е.

$$f'_-(x_0) \ge 0. \qquad (*)$$

Если $\Delta x > 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$, т. е.

$$f'_+(x_0) \le 0. \qquad (**)$$

По условию функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$. Но тогда должно быть: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Совместное же осуществление соотношений (*) и (**) возможно лишь тогда, когда $f'(x_0) = 0$.

Случай, когда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, рассматривается совершенно аналогично. ◀

Из теоремы 1 вытекает важное **следствие**: точки, в которых функция имеет экстремум, следует искать среди точек, в которых либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x) = \infty$, либо $f'(x)$ не существует. Все эти три случая реализуются для функций: 1) $y = x^2$, 2) $y = x^{2/3}$, 3) $y = |x|$ (см. рис. 4.28, 4.29, 4.30).

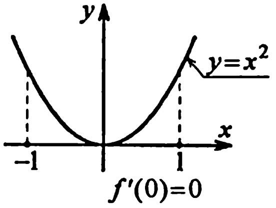


Рис. 4.28

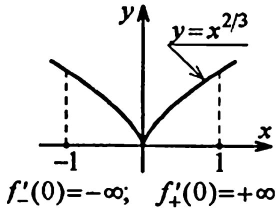


Рис. 4.29

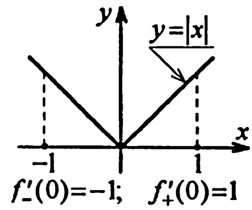


Рис. 4.30

Каждая из этих трех функций в точке $x = 0$ имеет минимум. Те точки, в которых $f'(x) = 0$, а также те точки, в которых производная $f'(x)$ бесконечна или не существует, но сама функция $f(x)$ непрерывна, называются *критическими точками* функции $f(x)$. (Те точки, в которых $f'(x) = 0$, будем называть *подозрительными на гладкий экстремум*, а точки, в которых $f'(x)$ бесконечна или не существует, — *подозрительными на острый экстремум*.)

Отметим, что не в каждой критической точке функция $f(x)$ обязательно имеет экстремум. Так, например, точка $x = 0$ является критической для каждой из функций: 1) $y = x^3$, 2) $y = x^{1/3}$, 3) $y = x + \frac{1}{2}|x|$. Однако ни одна из этих функций в точке $x = 0$ не имеет экстремума (см. рис. 4.31, 4.32, 4.33).

Следовательно, для решения задачи нахождения экстремумов функции $f(x)$ требуется найти признаки, которые позволяли бы судить, имеется ли в данной критической точке экстремум функции или нет; а если имеется, то максимум это или минимум.

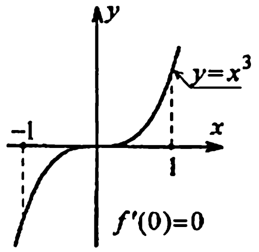


Рис. 4.31

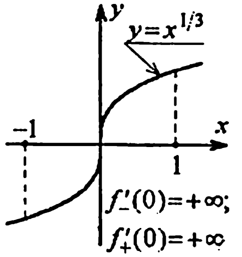


Рис. 4.32

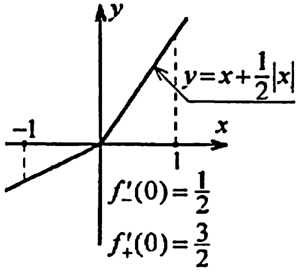


Рис. 4.33

Теорема 2. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X. Пусть точка x_0 — внутренняя точка промежутка X. Пусть точка x_0 — критическая точка функции $f(x)$. Пусть в некоторой проколотой δ-окрестности $\overset{\circ}{u}_\delta(x)$ точки x_0 функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$, причем $f'(x)$ сохраняет знак как в $u_\delta^-(x_0)$, так и в $u_\delta^+(x_0)$ (в каждой полуокрестности $f'(x)$ сохраняет свой знак). Тогда:

1) если для $x \in u_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$, а для $x \in u_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$, т. е. если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с "+" на "−", то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий максимум;

2) если для $x \in u_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$, а для $x \in u_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, т. е. если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с "−" на "+", то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий минимум;

3) если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ знака не меняет, т. е. либо $f'(x) < 0$ как для $x \in u_\delta^-(x_0)$, так и для $x \in u_\delta^+(x_0)$, либо $f'(x) > 0$ как для $x \in u_\delta^-(x_0)$, так и для $x \in u_\delta^+(x_0)$, то функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума.

▶ Возьмем в $\overset{\circ}{u}_\delta(x_0)$ любую точку x. Заметим, что: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[x_0, x]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в промежутке (x_0, x). Видим, что выполнены условия теоремы Лагранжа. Поэтому имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \qquad (*)$$

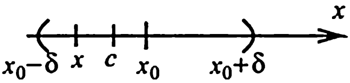


Рис. 4.34

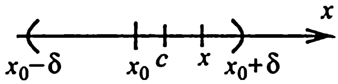


Рис. 4.35

Рассмотрим случай 1): $f'(x)>0$ для $x\in u_\delta^-(x_0)$, $f'(x)<0$ для $x\in u_\delta^+(x_0)$. Имеем: если $x\in u_\delta^-(x_0)$, то и точка $c\in u_\delta^-(x_0)$. Значит, $f'(c)>0$. Так как $x\in u_\delta^-(x_0)$, то $x-x_0<0$. А тогда из соотношения (*) следует, что $f(x)-f(x_0)<0$, т. е. $f(x)<f(x_0)$ для $x\in u_\delta^-(x_0)$. Имеем, далее, если $x\in u_\delta^+(x_0)$, то и точка $c\in u_\delta^+(x_0)$. Значит, $f'(c)<0$. Так как $x\in u_\delta^+(x_0)$, то $x-x_0>0$. А тогда из соотношения (*) следует, что $f(x)-f(x_0)<0$, т. е. $f(x)<f(x_0)$ для $x\in u_\delta^+(x_0)$. Получили, таким образом, что $f(x)<f(x_0)$ для всех $x\in \mathring{u}_\delta(x_0)$. А это означает, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий максимум.

Рассмотрим случай 2): $f'(x)<0$ для $x\in u_\delta^-(x_0)$, $f'(x)>0$ для $x\in u_\delta^+(x_0)$. Имеем: если $x\in u_\delta^-(x_0)$, то и точка $c\in u_\delta^-(x_0)$. Значит, $f'(c)<0$. Так как $x\in u_\delta^-(x_0)$, то $x-x_0<0$. А тогда из соотношения (*) следует, что $f(x)-f(x_0)>0$, т. е. $f(x)>f(x_0)$ для $x\in u_\delta^-(x_0)$. Имеем, далее, если $x\in u_\delta^+(x_0)$, то и точка $c\in u_\delta^+(x_0)$. Значит, $f'(c)>0$. Так как $x\in u_\delta^+(x_0)$, то $x-x_0>0$. А тогда из соотношения (*) следует, что $f(x)-f(x_0)>0$, т. е. $f(x)>f(x_0)$ для $x\in u_\delta^+(x_0)$. Получили, таким образом, что $f(x)>f(x_0)$ для всех $x\in \mathring{u}_\delta(x_0)$. А это означает, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий минимум.

Рассмотрим случай 3): при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак; пусть для определенности: $f'(x)<0$ для $x\in u_\delta^-(x_0)$ и $f'(x)<0$ для $x\in u_\delta^+(x_0)$. Имеем: если $x\in u_\delta^-(x_0)$, то и точка $c\in u_\delta^-(x_0)$. Значит, $f'(c)<0$. Так как $x\in u_\delta^-(x_0)$, то $x-x_0<0$. А тогда из соотношения (*) следует, что $f(x)-f(x_0)>0$, т. е. $f(x)>f(x_0)$ для $x\in u_\delta^-(x_0)$. Значит, в точке x_0 у функции $f(x)$ нет максимума. Имеем, далее, если $x\in u_\delta^+(x_0)$, то и точка $c\in u_\delta^+(x_0)$. Значит, $f'(c)<0$. Так как $x\in u_\delta^+(x_0)$, то $x-x_0>0$. А тогда из соотношения (*) следует, что $f(x)-f(x_0)<0$, т. е. $f(x)<f(x_0)$ для $x\in u_\delta^+(x_0)$. Это означает, что у функции $f(x)$ в точке x_0 нет минимума.

Общий вывод: у функции $f(x)$ в точке x_0 нет экстремума. Совершенно аналогично можно убедиться, что у функции $f(x)$ в точке x_0 нет экстремума, если $f'(x) > 0$ как для $x \in u_\delta^-(x_0)$, так и для $x \in u_\delta^+(x_0)$. ◀

Замечание 1. Теорема 2 позволяет полностью решить вопрос об отыскании экстремумов функции $f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $X = \langle a,b \rangle$;

2) $f(x)$ имеет в (a,b) конечное число критических точек $x_1, x_2, ..., x_n$ (считаем, что $a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$);

3) в каждом из промежутков: (a,x_1), (x_1,x_2), ..., (x_n,b) существует конечная непрерывная производная $f'(x)$.

Практически исследование функции на экстремум происходит следующим образом.

1) Находят все критические точки функции $f(x)$ и располагают их в порядке возрастания.

2) Каждое критическое значение аргумента испытывают на изменение знака производной $f'(x)$. Для этого берут два значения аргумента x_* и x_{**} (x_* меньше, а x_{**} больше исследуемого критического значения аргумента). При этом должно быть соблюдено условие, чтобы x_* и x_{**} были ближе к исследуемому критическому значению аргумента, чем ближайшие критические точки. Затем определяют знаки чисел $f'(x_*)$ и $f'(x_{**})$. Могут реализоваться следующие случаи:

$f'(x_*)$	$f'(x_{**})$	
+	−	max
−	+	min
+	+	нет экстремума
−	−	нет экстремума

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

▶ Функция $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Имеем

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + (x-5)\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}} = \frac{5(x-2)}{3x^{1/3}}.$$

Точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ — критические точки функции $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$. Точка $x_1 = 0$ — подозрительна на острый экстремум, а точка $x_2 = 2$ — подозрительна на гладкий экстремум.

Испытываем точку $x_1 = 0$. Пусть $x_* = -1$, $x_{**} = 1$. Имеем $f'(x_*) = f'(-1) = 5 > 0$; $f'(x_{**}) = f'(1) = -\frac{5}{3} < 0$. *Вывод*: в точке $x_1 = 0$ функция $f(x)$ имеет строгий максимум (острый) $y_{\max} = f(0) = 0$.

Испытываем точку $x_2 = 2$. Пусть $x_* = 1$, $x_{**} = 8$. Имеем $f'(x_*) = f'(1) = -\frac{5}{3} < 0$; $f'(x_{**}) = f'(8) = 5 > 0$. *Вывод*: в точке $x_2 = 2$ функция $f(x)$ имеет строгий минимум (гладкий). $y_{\min} = y(2) = -3\sqrt[3]{4}$.

Имеем

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(x-5)\sqrt[3]{x^2} = -\infty; \ \lim_{x\to+\infty} y =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x-5)\sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

На рис. 4.36 представлена схема графика функции $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

Замечание 2. Изложенный выше способ позволяет исследовать на экстремум и функции, имеющие в промежутке $\langle a, b\rangle$ конечное число разрывов, при условии, что в каждом промежутке между соседними точками разрывов функции $f(x)$, выполнены условия 1), 2), 3) замечания 1.

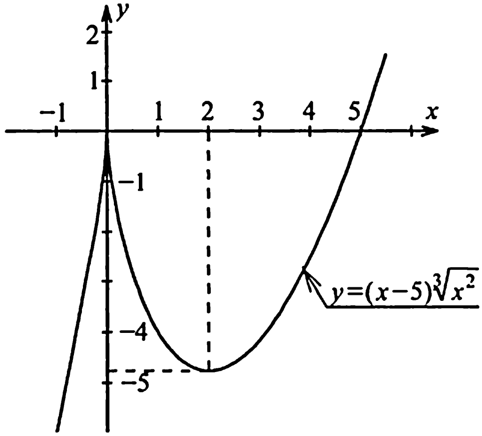


Рис. 4.36

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

▶ Область существования функции: $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=+\infty.$$

Точка $x=1$ — точка разрыва второго рода. Имеем

$$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Видим, что $y'=0$ в точках $x_1=0$ и $x_2=2$. Во всех остальных точках области существования функции производная y' существует конечная. В каждом из промежутков $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ выполнены условия 1), 2), 3) замечания 1. Точки $x_1=0$ и $x_2=2$ подозрительны на гладкий экстремум.

Испытываем точку $x_1=0$. Пусть $x_*=-1$, $x_{**}=\dfrac{1}{2}$ (важно, что $x_{**}<1$). Имеем $f'(x_*)=f'(-1)=\dfrac{3}{4}>0$; $f'(x_{**})=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3<0$.

Вывод: в точке $x_1=0$ функция $f(x)$ имеет строгий максимум $y_{\max}=y(0)=0$.

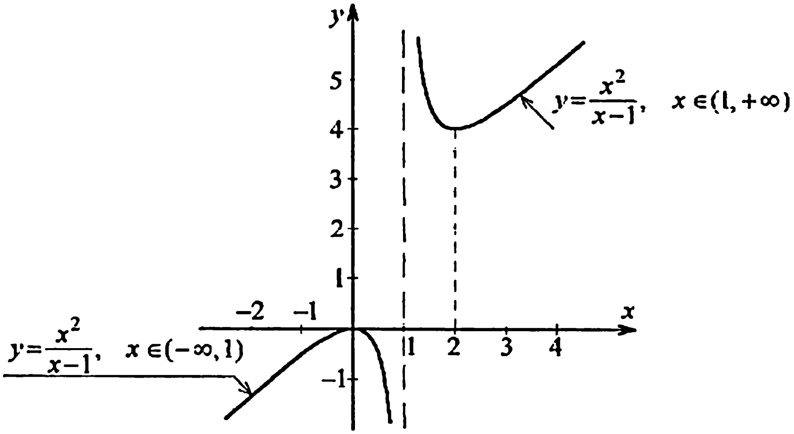


Рис. 4.37

Испытываем точку $x_2 = 2$. Пусть $x_* = \frac{3}{2}$ (важно, что $x_* > 1$); $x_{**} = 3$. Имеем $f'(x_*) = f'\left(\frac{3}{2}\right) = -3 < 0$; $f'(x_{**}) = f'(3) = \frac{3}{4} > 0$. *Вывод*: в точке $x_2 = 2$ функция $f(x)$ имеет строгий минимум $y_{\min} = y(2) = 4$.

Имеем

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty.$$

На рис. 4.37 представлена схема графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

2. Исследование стационарных критических точек функции с помощью второй производной.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $\langle a,b\rangle$ и точка x_0 является внутренней точкой этого промежутка. Точка x_0 называется стационарной критической точкой функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$.

Лемма. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $\langle a,b\rangle$ всюду, за исключением, быть может, точки x_0. Пусть существует конечный, отличный от нуля, предел

$$A = \lim_{x\to x_0} f(x) (A \neq 0, A \neq \infty).$$

Тогда существует проколотая δ-окрестность $\mathring{u}_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $\mathring{u}_\delta(x_0) \subset \langle a,b\rangle$ и $f(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathring{u}_\delta(x_0)$, причем значения $f(x)$ в $\mathring{u}_\delta(x_0)$ имеют знак числа A.

▶ По условию $A \neq 0$. Пусть для определенности $A > 0$. Так как $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, то любому $\varepsilon > 0$ (в частности, $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$) отвечает число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{u}_\delta(x_0)$ будет

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2}$$

(считаем число $\delta > 0$ столь малым, что $\mathring{u}_\delta(x_0) \subset \langle a,b\rangle$). Следовательно, для всех $x \in \mathring{u}_\delta(x_0)$ будет $-\frac{A}{2} < f(x) - A < \frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$. В частности, $f(x) > \frac{A}{2}$ (> 0), если $x \in \mathring{u}_\delta(x_0)$. ◀

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $\langle a,b\rangle$. Пусть точка $x_0 \in (a,b)$ и является стационарной критической для $f(x)$. Пусть $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную, отличную от нуля, вторую производную $f''(x_0)$ (тем самым предполагается, что $f(x)$ имеет конечную первую производную $f'(x)$ не только в точке x_0, но и в некоторой δ_1-окрестности $u_{\delta_1}(x_0)$ точки x_0). Тогда:

1) если $f''(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий минимум;

2) если $f''(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий максимум.

▶ Докажем утверждение 1). Утверждение 2) доказывается аналогично. Итак, дано: $f''(x_0) > 0$. Требуется доказать, что $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий минимум. Имеем, по определению,

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

(ибо $f'(x_0) = 0$). По условию $f''(x_0) > 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$. Но тогда, по лемме, существует $\overset{\circ}{u}_\delta(x_0)$ (можно считать, что $\overset{\circ}{u}_\delta(x_0) \subset u_{\delta_1}(x_0)$) такая, что будет

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \text{ для всех } x \in \overset{\circ}{u}_\delta(x_0). \qquad (*)$$

Возьмем любое $x \in u_\delta^-(x_0)$. Но тогда $x - x_0 < 0$ и, следовательно, из соотношения (*) следует, что $f'(x) < 0$.

Возьмем любое $x \in u_\delta^+(x_0)$. Но тогда $x - x_0 > 0$ и, следовательно, из соотношения (*) следует, что $f'(x) > 0$.

Таким образом, получили: $f'(x) < 0$ для $x \in u_\delta^-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in u_\delta^+(x_0)$, т. е. что при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с "–" на "+". Это означает, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет строгий минимум. ◀

Замечание. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то на вопрос: имеет $f(x)$ в точке x_0 экстремум или нет, теорема 3 ответа не дает. Заметим, что при выполнении условий: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ возможны случаи наличия экстремума у функции $f(x)$ в точке x_0 и случаи его отсутствия.

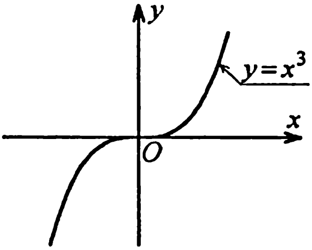


Рис. 4.38

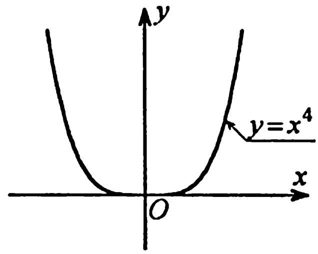


Рис. 4.39

Действительно, для функции $y = x^3$ в точке $x = 0$ обращаются в нуль $y' = 3x^2$ и $y'' = 6x$. Функция $y = x^3$ в точке $x = 0$ экстремума не имеет.

Для функции $y = x^4$ в точке $x = 0$ обращаются в нуль $y' = 4x^3$ и $y'' = 12x^2$. Функция $y = x^4$ в точке $x = 0$ имеет минимум.

Рассмотрим пример на применение теоремы 3.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \sin x + \cos x$ в промежутке $[0, 2\pi]$.

▶ Имеем $f'(x) = \cos x - \sin x$. $f'(x) = 0$ в точках $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$; $x_2 = \dfrac{5}{4}\pi$. В остальных точках промежутка $(0, 2\pi)$ $f'(x)$ существует конечная, отличная от нуля. Точки $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ и $x_2 = \dfrac{5}{4}\pi$ — стационарные критические точки функции $f(x)$. Имеем $f''(x) = -\sin x - \cos x \Rightarrow$ $\Rightarrow f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0$; $f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0$.

Вывод: функция $f(x) = \sin x + \cos x$ в точке $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ имеет строгий максимум, а в точке $x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$ — строгий минимум.

§ 13. Характер выпуклости кривой. Точки перегиба

1. Пусть кривая (L) является графиком функции $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Пусть точка x_0 — внутренняя точка промежутка $\langle a, b\rangle$, т. е. $x_0 \in (a, b)$. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$, а значит, кривая (L) имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную (K), не параллельную оси Oy.

Определение 1. Если существует δ-окрестность $u_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $u_\delta(x_0) \subset \langle a, b\rangle$ и для всех $x \in \overset{\circ}{u}_\delta(x_0)$ оказывается, что точки $M(x, f(x))$ кривой (L) лежат выше касательной (K) к кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то говорят, что (L) в точке M_0 *направлена выпуклостью вниз* (см. рис. 4.40).

Определение 2. Если существует δ-окрестность $u_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $u_\delta(x_0) \subset \langle a, b\rangle$ и для всех $x \in \overset{\circ}{u}_\delta(x_0)$ оказывается, что точки $M(x, f(x))$ кривой (L) лежат ниже касательной (K) к кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то говорят, что (L) в точке M_0 *направлена выпуклостью вверх* (см. рис. 4.41).

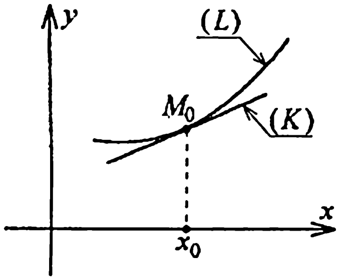


Рис. 4.40

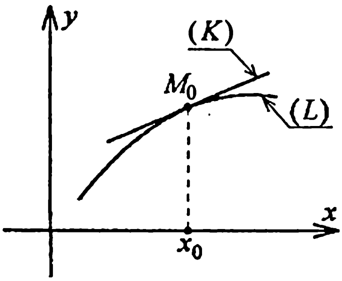


Рис. 4.41

Теорема 1. Пусть (L) есть график функции $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Пусть точка x_0 — внутренняя точка промежутка $\langle a, b\rangle$, т. е. $x_0 \in (a, b)$. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную вторую производную $f''(x_0)$ (тем самым предполагается, что $f(x)$ имеет конечную первую производную $f'(x)$ в некоторой δ_1-окрестности $u_{\delta_1}(x_0)$ точки x_0). Тогда:

1) если $f''(x_0) > 0$, то (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ направлена выпуклостью вниз;

2) если $f''(x_0) < 0$, то (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ направлена выпуклостью вверх.

▶ Докажем утверждение 1). Утверждение 2) доказывается аналогично.

По условию $f''(x_0) > 0$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$. Следовательно, существует δ-окрестность $u_\delta(x_0)$ такая, что $u_\delta(x_0) \subset u_{\delta_1}(x_0)$ и для всех $x \in \overset{\circ}{u}_\delta(x_0)$ будет

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0. \qquad (*)$$

Из соотношения (*) следует, что

$$\begin{aligned} &1) f'(x)-f'(x_0)<0, \quad \text{если} \quad x\in u_\delta^-(x_0);\\ &2) f'(x)-f'(x_0)>0, \quad \text{если} \quad x\in u_\delta^+(x_0). \end{aligned} \qquad (1)$$

Напишем уравнение касательной (K) к кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (2)$$

Станем сравнивать ординаты точек, лежащих на (L) и на (K), при одном и том же x из $\mathring{u}_\delta(x_0)$, т. е. рассмотрим разность $y_{\text{кр}}-y_{\text{кас}}$. Будем иметь

$$y_{\text{кр}}-y_{\text{кас}}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0), x\in\mathring{u}_\delta(x_0). \qquad (3)$$

По теореме Лагранжа $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, где точка c — некоторая точка, лежащая между точками x_0 и x. А тогда из (3)

$$y_{\text{кр}}-y_{\text{кас}}=(x-x_0)\,(f'(c)-f'(x_0)). \qquad (4)$$

Возьмем любое x из $u_\delta^-(x_0)$. Тогда точка $c\in u_\delta^-(x_0)$ и, следовательно, $f'(c)-f'(x_0)<0$ (см. соотношения (1)). Кроме того, в этом случае $x-x_0<0$. А тогда из соотношения (4) заключаем, что

$$y_{\text{кр}}-y_{\text{кас}}>0, \text{ т. е. } y_{\text{кр}}>y_{\text{кас}}, \text{ для } x\in u_\delta^-(x_0). \qquad (5)$$

Возьмем теперь любое x из $u_\delta^+(x_0)$. Тогда точка $c\in u_\delta^+(x_0)$ и, следовательно, $f'(c)-f'(x_0)>0$ (см. соотношения (1)). Кроме того, в этом случае $x-x_0>0$. А тогда из соотношения (4) заключаем, что

$$y_{\text{кр}}-y_{\text{кас}}>0, \text{ т. е. } y_{\text{кр}}>y_{\text{кас}}, \text{ для } x\in u_\delta^+(x_0). \qquad (6)$$

Из соотношений (5) и (6) следует, что

$$y_{\text{кр}}-y_{\text{кас}}>0, \text{ для любого } x\in\mathring{u}_\delta(x_0),$$

т. е. что точки $M(x, f(x))$ кривой (L) лежат выше касательной (K) к (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ для всех $x\in\mathring{u}_\delta(x_0)$. Значит, кривая ($L$) в точке M_0 направлена выпуклостью вниз. ◀

2°. Точки перегиба. Пусть (L) есть график функции $y=f(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$. Пусть точка x_0 — внутренняя точка промежутка $\langle a,b\rangle$, т. е.

$x_0 \in (a,b)$. Пусть кривая (L) имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную (K), не параллельную оси Oy.

Определение. Если существует δ-окрестность $u_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $u_\delta(x_0) \subset \langle a,b \rangle$ и оказывается, что: для всех $x \in u_\delta^-(x_0)$ точки $M(x, f(x))$ кривой (L) лежат по одну сторону от касательной (K) к кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, а для всех $x \in u_\delta^+(x_0)$ точки $M(x, f(x))$ кривой (L) лежат по другую сторону от касательной (K) к кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* кривой (L) (рис. 4.42).

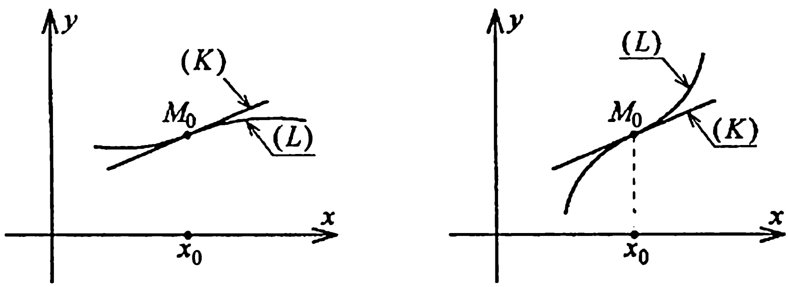


Рис. 4.42

Из теоремы, доказанной выше, следует, что точки перегиба кривой (L) следует искать среди точек, в которых либо $f''(x) = 0$, либо $f''(x) = \infty$, либо $f''(x)$ не существует. Следует заметить, что не в каждой точке, в которой имеет место одно из этих трех соотношений, кривая (L) имеет перегиб. Так, например, для функции $y = x^4$, имеем $y''(0) = 0$. Однако точка $M_0(0, 0)$ не является точкой перегиба графика (L) этой функции, ибо все точки кривой (L) лежат выше касательной (K) к этой кривой в точке $M_0(0, 0)$ (см. рис. 4.43).

Точки, в которых либо $f''(x) = 0$, либо $f''(x)$ не существует, либо $f''(x) = \infty$, будем называть *точками, подозрительными на перегиб.*

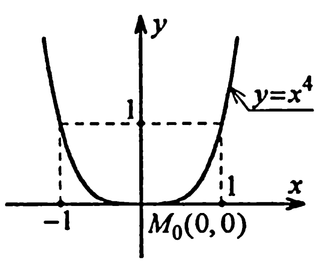


Рис. 4.43

Теорема 2. Пусть (L) есть график функции $y = f(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$. Пусть точка $x_0 \in (a,b)$ и пусть кривая (L) имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную (K), не параллельную оси Oy. Пусть точка $M_0(x_0, f(x_0))$ является подозрительной на перегиб. Пусть имеется δ-окрестность $u_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что $u_\delta(x_0) \subset \langle a,b\rangle$ и для любого $x \in \mathring{u}_\delta(x_0)$ существует конечная $f''(x)$, причем $f''(x)$ сохраняет знак как в $u_\delta^-(x_0)$, так и в $u_\delta^+(x_0)$ (в каждой полуокрестности $f''(x)$ сохраняет свой знак). Тогда:

1) если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то кривая (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет перегиб;

2) если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ не меняет знак, то у кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ перегиба нет.

▶ Напишем уравнение касательной (K) к кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Возьмем затем любую точку $x \in \mathring{u}_\delta(x_0)$ и сравним при этом x ординаты точек, лежащих на (L) и на (K). Для этого рассмотрим разность $y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}}$. Имеем

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где точка c — некоторая точка, лежащая между точками x_0 и x (см. рис. 4.44). Следовательно,

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0). \tag{7}$$

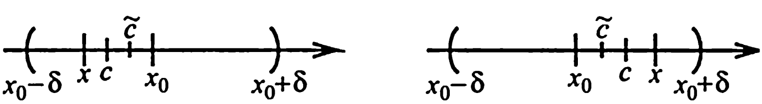


Рис. 4.44

Из условия теоремы следует, что $f'(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[c, x_0]$ и что $f''(x) = (f'(x))'$ существует конечная, по крайней мере, в промежутке (c, x_0). Видим, что функция $f'(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа в промежутке $[c, x_0]$. Следовательно, $f'(c) - f'(x_0) = f''(\tilde{c})(c - x_0)$, где $\tilde{c}$ — некоторая точка, лежащая между точками c и x_0.

Теперь вместо (7) можем написать

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} = f''(\tilde{c})(c - x_0)(x - x_0). \tag{8}$$

Заметим, что если $x \in u_\delta^-(x_0)$, то и $\tilde{c} \in u_\delta^-(x_0)$; если $x \in u_\delta^+(x_0)$, то и $\tilde{c} \in u_\delta^+(x_0)$. Значит, в обоих случаях: $(c - x_0)(x - x_0) > 0$. А тогда из (8) заключаем, что знак разности $y_{кр} - y_{кас}$ определяется знаком $f''(\tilde{c})$.

Рассмотрим случай I, когда $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак. Пусть, для определенности, $f''(x) < 0$ для $x \in u_\delta^-(x_0)$ и $f''(x) > 0$ для $x \in u_\delta^+(x_0)$.

Было замечено выше, что если $x \in u_\delta^-(x_0)$, то и $\tilde{c} \in u_\delta^-(x_0)$, а значит, $f''(\tilde{c}) < 0$ (у нас, по условию, $f''(x) < 0$ для любого $x \in u_\delta^-(x_0)$). Следовательно, $y_{кр} - y_{кас} < 0$ для любого $x \in u_\delta^-(x_0)$, т. е.

$$y_{кр} < y_{кас}, \text{ для любого } x \in u_\delta^-(x_0). \tag{9}$$

Было замечено выше, что если $x \in u_\delta^+(x_0)$, то и $\tilde{c} \in u_\delta^+(x_0)$, а значит, $f''(\tilde{c}) > 0$ (у нас, по условию, $f''(x) > 0$ для любого $x \in u_\delta^+(x_0)$). Получаем, следовательно, $y_{кр} - y_{кас} > 0$ для любого $x \in u_\delta^+(x_0)$, т. е.

$$y_{кр} > y_{кас}, \text{ для любого } x \in u_\delta^+(x_0). \tag{10}$$

Из (9) и (10) видим, что для всех $x \in u_\delta^-(x_0)$ точки $M(x, f(x))$ кривой (L) лежат ниже касательной (K) к кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, а для всех $x \in u_\delta^+(x_0)$ точки $M(x, f(x))$ кривой (L) лежат выше этой касательной. Значит, точка $M_0(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба кривой (L).

Рассмотрим случай II, когда $f''(x)$ не меняет знак при переходе через точку x_0. Пусть, для определенности, $f''(x) < 0$ как для $x \in u_\delta^-(x_0)$, так и для $x \in u_\delta^+(x_0)$.

Пусть x — любое из $u_\delta^-(x_0)$. Тогда и $\tilde{c} \in u_\delta^-(x_0)$. Значит, $f''(\tilde{c}) < 0$ (у нас, по условию, $f''(x) < 0$, для любого $x \in u_\delta^-(x_0)$). Следовательно, $y_{кр} - y_{кас} < 0 \Rightarrow$

$$y_{кр} < y_{кас} \text{ для любого } x \in u_\delta^-(x_0). \tag{11}$$

Возьмем x — любое из $u_\delta^+(x_0)$. Тогда и $\tilde{c} \in u_\delta^+(x_0)$. Значит, $f''(\tilde{c}) < 0$ (у нас, по условию, $f''(x) < 0$, для любого $x \in u_\delta^+(x_0)$). Следовательно, $y_{кр} - y_{кас} < 0 \Rightarrow$

$$y_{кр} < y_{кас} \text{ для любого } x \in u_\delta^+(x_0). \tag{12}$$

Из (11) и (12) видим, что $y_{кр} < y_{кас}$ для всех $x \in \mathring{u}_\delta(x_0)$, т. е. что для всех $x \in \mathring{u}_\delta(x_0)$ точки $M(x, f(x))$ кривой (L) лежат ниже касательной (K) к кривой (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Значит, кривая (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ не имеет перегиба. ◀

Пример. Найти точки экстремума, точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой, заданной уравнением $y = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

▶ Имеем $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y' = 0$ в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Во всех остальных точках промежутка $(-\infty, +\infty)$ y' существует конечная, отличная от нуля. Имеем, далее, $y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} \Rightarrow y'' = 0$ в точках $\tilde{x}_1 = -\sqrt{3}$, $\tilde{x}_2 = 0$, $\tilde{x}_3 = \sqrt{3}$. Во всех остальных точках промежутка $(-\infty, +\infty)$ y'' существует конечная, отличная от нуля.

Вывод:

1) Точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ — подозрительны на гладкий экстремум.

2) Точки $\tilde{x}_1 = -\sqrt{3}$, $\tilde{x}_2 = 0$, $\tilde{x}_3 = \sqrt{3}$ — подозрительны на перегиб.

Имеем:

$y''(x_1) = y''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ точка $x_1 = -1$ есть точка строгого минимума; $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{2}$.

$y''(x_2) = y''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ точка $x_2 = 1$ есть точка строгого максимума; $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{2}$.

При переходе через точку $\tilde{x}_1 = -\sqrt{3}$ $y''(x)$ меняет знак с "−" на "+". Значит, точка $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ есть точка перегиба графика функции $y = \frac{x}{1+x^2}$.

При переходе через точку $\bar{x}_2 = 0$ $y''(x)$ меняет знак с "+" на "−". Значит, точка $(0, 0)$ есть точка перегиба графика функции

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

При переходе через точку $\bar{x}_3 = \sqrt{3}$ $y''(x)$ меняет знак с "−" на "+". Значит, точка $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ есть точка перегиба графика функции

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Для $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$: $y''(x) < 0$ (выпуклость вверх).

Для $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right)$: $y''(x) > 0$ (выпуклость вниз).

Для $x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$: $y''(x) < 0$ (выпуклость вверх).

Для $x \in \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$: $y''(x) > 0$ (выпуклость вниз).

Имеем

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

На рис. 4.45 представлена схема графика функции $y = \frac{x}{1+x^2}$.

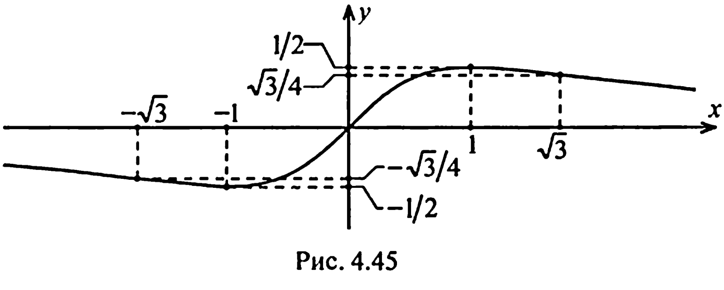


Рис. 4.45

Замечание. Пусть кривая (L) является графиком функции $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Из изложенного выше приходим к выводу, что точками перегиба кривой (L) оказываются точки, при переходе через которые изменяется направление выпуклости (L). В определении точки $M_0(x_0, f(x_0))$, как точки перегиба кривой (L), предполагалось, что кривая (L) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет касательную, не параллельную оси Oy. Если исходить из определения точки перегиба кривой (L), как точки, при переходе через которую изменяется направление выпуклости кривой, то можно отказаться от этого ограничения. Тогда точками перегиба кривой (L) будут также точки, в которых производная $f'(x)$ бесконечна, но определенного знака.

Так, например, для кривой (L), являющейся графиком функции $y = x^{1/3}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, точка $M_0(0, 0)$ будет точкой перегиба (см. рис. 4.46).

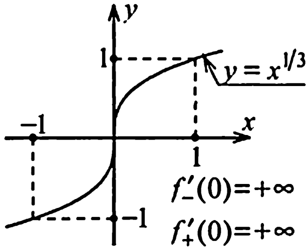


Рис. 4.46

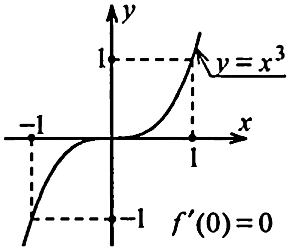


Рис. 4.47

И, вообще, следует отметить, что точки графика функции $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, для которых либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x) = \infty$, но в которых нет экстремума, будут точками перегиба. Это утверждение справедливо лишь в случае, когда указанные критические точки функции $f(x)$ являются изолированными, т. е. когда существует окрестность каждой такой точки, в которой нет других критических точек функции $f(x)$.

Кроме примера, рассмотренного только что, приведем еще один пример. Пусть кривая (L) является графиком функции $y = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Имеем $y'(0) = 0$, но в точке $x = 0$ эта функция не имеет экстремума. Точка $M_0(0, 0)$ будет точкой перегиба графика функции $y = x^3$ (см. рис. 4.47).

§ 14. Асимптоты кривой

1. Пусть кривая (L) является графиком функции $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (может быть также $x \in (-\infty, b\rangle$ или $x \in \langle a, +\infty)$, где a и b — конечные числа). Пусть $y = kx + b$ и $y = \tilde{k}x + \tilde{b}$ — некоторые фиксированные прямые.

Определение.

I. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* кривой (L) при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0. \qquad (1)$$

II. Прямая $y = \tilde{k}x + \tilde{b}$ называется *асимптотой* кривой (L) при $x \to -\infty$, если

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \tilde{k}x - \tilde{b}\right) = 0. \qquad (2)$$

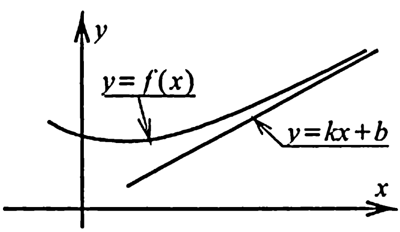


Рис. 4.48

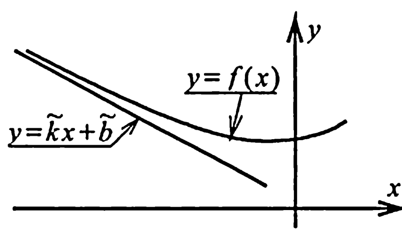


Рис. 4.49

Теорема 1. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали одновременно следующие два конечных предела:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx\right] = b. \qquad (3)$$

▶ *Необходимость.* Пусть график функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Но тогда, по определению, имеем (1):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = 0 \Rightarrow b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

Перепишем соотношение (1) в виде

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k.$$

Достаточность. Пусть существуют одновременно конечные пределы (3). Но тогда из равенства $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right)$ следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$. А это означает, что у графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ имеется асимптота $y=kx+b$. ◀

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 2. Для того, чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to-\infty$ асимптоту $y=\tilde{k}x+\tilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали одновременно следующие два конечных предела:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\tilde{k} \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\tilde{k}x\right)=\tilde{b}. \qquad (\tilde{3})$$

Замечание. 1) Если k или $\tilde{k}$ оказываются равными нулю, то соответствующая асимптота называется *горизонтальной.*

2) Если k или $\tilde{k}$ оказываются отличными от нуля, то соответствующая асимптота называется *наклонной.*

2. Пусть кривая (L) является графиком функции $y=f(x)$. Пусть x_0 — конечное число.

Определение. Прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если имеет место хотя бы одно из следующих трех соотношений:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\infty;\ \lim_{x\to x_0+0}f(x)=\infty;\ \lim_{x\to x_0}f(x)=\infty.$$

На рис. 4.50 представлены некоторые из возможных схем графика функции $y=f(x)$, когда прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой этого графика.

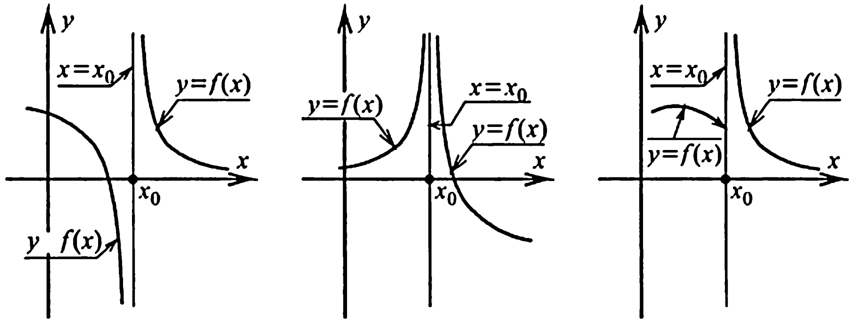


Рис. 4.50

Пример. Пусть $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$. Эта функция определена на всей оси Ox за исключением точки $x=0$. Имеем

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} \frac{x^2+2x-1}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} \frac{x^2+2x-1}{x} = -\infty.$$

Вывод: прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика заданной функции. Имеем, далее,

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2.$$

Вывод: прямая $y = kx + b = x + 2$ является наклонной асимптотой графика заданной функции при $x \to +\infty$.

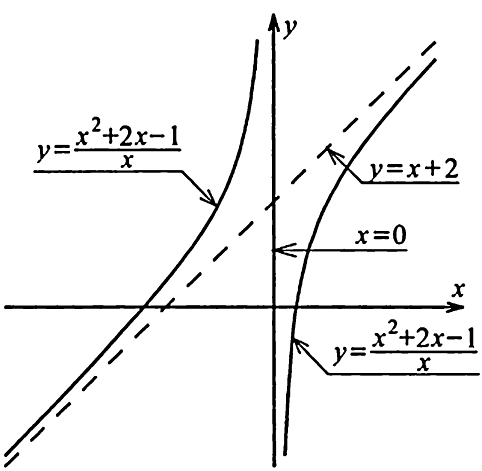


Рис. 4.51

Имеем еще

$$\tilde{k} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2} = 1;$$

$$\tilde{b} = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \tilde{k}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x} = 2.$$

Вывод: прямая $y = \tilde{k}x + \tilde{b} = x + 2$ является наклонной асимптотой графика заданной функции и при $x \to -\infty$. На рис. 4.51 представлена схема графика функции $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

§ 15. Построение графика функции по характерным точкам

I. В этом параграфе мы изложим схему, по которой целесообразно проводить исследование графика функции, и приведем пример, иллюстрирующий эту схему.

Изучение заданной функции и построение ее графика с помощью развитого нами аналитического аппарата следует проводить в следующем порядке.

1. Определить область существования функции, область непрерывности и точки разрыва.
2. Выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных).
3. Найти области возрастания и убывания функции и точки экстремума.
4. Найти области сохранения направления выпуклости графика функции и точки перегиба.
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

По полученным данным легко строится эскиз графика функции. Важно помнить при этом, что график функции не может доставлять точные числовые значения (это делает формула, задающая функцию). График же дает представление о качественной стороне поведения функции.

В качестве примера построим график функции

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}. \tag{1}$$

Будем следовать изложенной выше схеме.

1. Так как функция (1) дробно-рациональная, то она определена и непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$ всюду, за исключением точки $x = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль.

2. Выясним вопрос о существовании асимптот. Имеем

$$\lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to-0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty.$$

Вывод. График функции (1) имеет вертикальную асимптоту

$$x = 0. \qquad (2)$$

Имеем, далее,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^3} = \frac{1}{2} \left(k = \tilde{k} = \frac{1}{2}\right);$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} - \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\frac{5}{4} \left(b = \tilde{b} = -\frac{5}{4}\right).$$

Вывод. График функции (1) имеет наклонную асимптоту

$$y = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \qquad (3)$$

как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$.

3. Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции (1) и точек экстремума вычисляем первую производную функции (1)

$$y' = \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3} = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}$$

$\Rightarrow y' = 0$ в точках: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. (Эти точки подозрительны на гладкий экстремум.) Во всех остальных точках области существования функции (1): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y' существует конечная, отличная от нуля. Так как функция (1) терпит разрыв в точке $x = 0$, то к числу критических точек функции, разбивающих область существования функции на интервалы, в которых производная y' сохраняет знак, следует присоединить точку разрыва.

Таким образом, мы получаем следующие интервалы сохранения знака y'.

Интервалы значений x	$-\infty<x<-3$	$-3<x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x<+\infty$
Знак y'	+	−	+	−	+
Поведение функции	возрастает	убывает	возрастает	убывает	возрастает

При переходе через точку $x_1=-3$ y' меняет знак с "+" на "−". Значит, в точке $x_1=-3$ функция имеет строгий максимум; $y_{\max}=y(-3)=-\dfrac{49}{12}$.

При переходе через точку $x_2=1$ y' меняет знак с "+" на "−". Значит, в точке $x_2=1$ функция имеет строгий максимум; $y_{\max}=y(1)=\dfrac{5}{4}$.

При переходе через точку $x_3=2$ y' меняет знак с "−" на "+". Значит, в точке $x_3=2$ функция имеет строгий минимум; $y_{\min}=y(2)=\dfrac{9}{8}$.

4. Для нахождения промежутков сохранения направления выпуклости графика функции и точек перегиба вычисляем вторую производную функции (1).

$$y''=\frac{7x-9}{x^4}=\frac{7\left(x-\frac{9}{7}\right)}{x^4}$$

$\Rightarrow$ $y''=0$ в точке $\tilde{x}_1=\dfrac{9}{7}$ (эта точка подозрительна на перегиб).

Во всех остальных точках области существования функции (1) $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ y'' существует конечная, отличная от нуля. Так как функция (1) терпит разрыв в точке $x=0$, то к числу точек, подозрительных на перегиб, разбивающих область существования функции на интервалы, в которых вторая производная y'' сохраняет знак, следует присоединить точку разрыва.

В результате мы получим следующие интервалы сохранения знака y''.

Интервалы значений x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \frac{9}{7}$	$\frac{9}{7} < x < +\infty$
Знак y''	$-$	$-$	$+$
Направление выпуклости графика	вверх	вверх	вниз

При переходе через точку $\tilde{x}_1 = \frac{9}{7}$ y'' меняет знак с "$-$" на "$+$".

Значит, в точке $\left(\frac{9}{7}, f\left(\frac{9}{7}\right)\right)$ график функции имеет перегиб ($y\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{913}{756}$).

5. Найдем точки пересечения графика функции (1) с осью Ox (с осью Oy пересечения нет, ибо $x \neq 0$). Эти точки соответствуют вещественным корням уравнения

$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0.$$

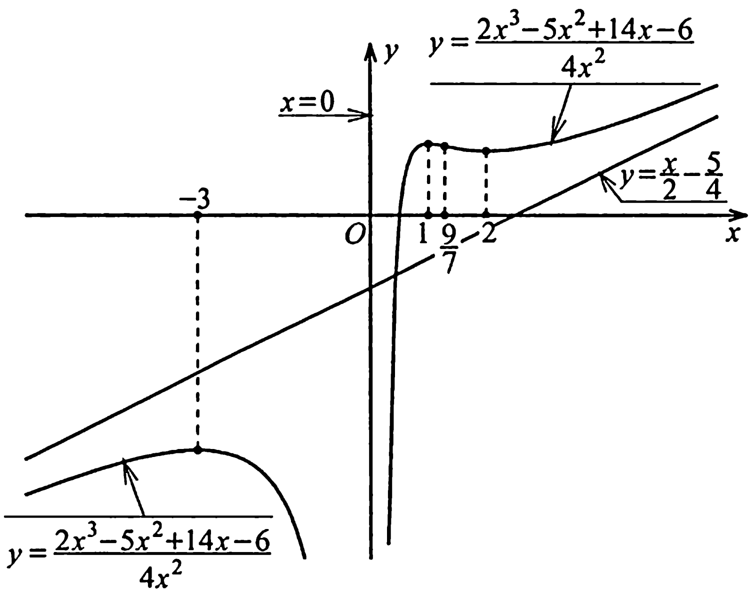


Рис. 4.52

Имеем $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 6)$. Так как квадратный трехчлен $x^2 - 2x + 6$ имеет комплексные корни, то обсуждаемое уравнение имеет только один вещественный корень $x = \frac{1}{2}$. Следовательно, график функции (1) пересекает ось Ox в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. На рис. 4.52 представлена схема графика функции: $y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$.

II. Построение графиков функций, заданных параметрически. Пусть кривая (L) является графиком функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in \langle a, b \rangle .$$

Здесь не предполагается, что пара функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ определяет однозначно одну функцию $y = y(x)$ или $x = x(y)$. Под графиком параметрически заданной функции подразумевается объединение графиков всех функций вида $y = f(x)$ и $x = g(y)$, определяемых формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Сделаем несколько предварительных замечаний.

1) Для нахождения асимптот, параллельных оси Oy, нужно найти такие значения t_0, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t) = a$ (или $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t) = a$), а $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} y(t)$ (или $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} y(t)$) равен $+\infty$ или $-\infty$. Если такие значения t_0 существуют, то прямая $x = a$ будет асимптотой (вертикальной) графика функции.

2) Для нахождения асимптот, параллельных оси Ox, нужно найти такие значения t_0, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} y(t) = b$ (или $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} y(t) = b$), а $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$ (или $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} x(t)$) равен $+\infty$ или $-\infty$. Если такие значения t_0 существуют, то прямая $y = b$ будет асимптотой (горизонтальной) графика функции.

3) Для нахождения асимптот, не параллельных ни оси Ox, ни оси Oy, нужно найти такие значения t_0, для которых пределы $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t)$ и

$\lim\limits_{t\to t_0+0} y(t)$ (или $\lim\limits_{t\to t_0-0} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to t_0-0} y(t)$) равны $+\infty$ или $-\infty$ и существует конечный предел $\lim\limits_{t\to t_0+0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = k(\neq 0)$ (или $\lim\limits_{t\to t_0-0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = k(\neq 0)$).

Если для этого значения t_0 существует еще конечный предел $\lim\limits_{t\to t_0+0} (y(t) - kx(t)) = b$ (или $\lim\limits_{t\to t_0-0} (y(t) - kx(t)) = b$), то прямая $y = kx + b$ будет асимптотой (наклонной) графика функции.

4) Для определения промежутков возрастания и убывания функции, заданной параметрически, нахождения ее экстремумов, а также для определения промежутков сохранения направления выпуклости графика функции и точек перегиба, нужно использовать выражения для производных y'_x и y''_{xx} (x'_y, x''_{yy}) через производные x'_t, y'_t, x''_{tt}, y''_{tt}. При этом следует всегда помнить, что уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, вообще говоря, не определяют однозначно функцию вида $y = y(x)$, так что при исследовании графика функции нужно все время внимательно следить за тем, какая "ветвь" графика рассматривается (иногда полезнее рассматривать x как функцию от y).

В качестве примера построим график функции, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2 - 1}. \end{cases}$$

1. Видим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ определены и непрерывны для $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, т. е. для всех t, кроме $t = \pm 1$.

2. Выясним вопрос о существовании асимптот.

1) Имеем

$$\lim_{t\to -1-0} x(t) = \lim_{t\to -1-0} \frac{t^2}{t-1} = -\frac{1}{2}; \quad \lim_{t\to -1+0} x(t) = \lim_{t\to -1+0} \frac{t^2}{t-1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{t\to -1-0} y(t) = \lim_{t\to -1-0} \frac{t}{(t-1)(t+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to -1+0} y(t) = \lim_{t\to -1+0} \frac{t}{(t-1)(t+1)} = +\infty .$$

Вывод: прямая $x = -\frac{1}{2}$ — вертикальная асимптота графика функции.

2) Имеем

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{t-1} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{1-\frac{1}{t}} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{t^2-1} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{t\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to-\infty \\ (t\to-\infty)}} y = 0.$$

Вывод: прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции при $x \to -\infty$.

Имеем, далее,

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{t-1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{1-\frac{1}{t}} = +\infty;$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t^2-1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (t\to+\infty)}} y = 0.$$

Вывод: прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

3) Имеем

$$\lim_{t\to1-0} x(t) = \lim_{t\to1-0} \frac{t^2}{t-1} = -\infty; \quad \lim_{t\to1+0} x(t) = \lim_{t\to1+0} \frac{t^2}{t-1} = +\infty;$$

$$\lim_{t\to1-0} y(t) = \lim_{t\to1-0} \frac{t}{(t-1)(t+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to1+0} y(t) = \lim_{t\to1+0} \frac{t}{(t-1)(t+1)} = +\infty.$$

Значит, следует искать $\lim\limits_{t\to1-0} \frac{y(t)}{x(t)}$ и $\lim\limits_{t\to1+0} \frac{y(t)}{x(t)}$. Имеем

$$\lim_{t\to1-0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to1-0} \frac{t(t-1)}{(t-1)(t+1)t^2} = \lim_{t\to1-0} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2} \, (= \tilde{k}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to-\infty \\ (t\to1-0)}} \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{t\to 1+0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 1+0}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2}\,(=k)\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty\\(t\to 1+0)}}\frac{y(x)}{x}=\frac{1}{2}.$$

Станем искать теперь $\lim\limits_{t\to 1-0}\left[y(t)-\tilde{k}x(t)\right]$ и $\lim\limits_{t\to 1+0}\left[y(t)-kx(t)\right]$. Имеем

$$\lim_{t\to 1-0}\left[y(t)-\tilde{k}x(t)\right]=\lim_{t\to 1-0}\left[\frac{t}{t^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{t-1}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 1-0}\frac{-2-t}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to-\infty\\(t\to 1-0)}}\left(y(x)-\tilde{k}x\right)=-\frac{3}{4}\,(=\tilde{b});$$

$$\lim_{t\to 1+0}\left[y(t)-kx(t)\right]=\lim_{t\to 1+0}\left[\frac{t}{t^2-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{t-1}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 1+0}\frac{-2-t}{2(t+1)}=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty\\(t\to 1+0)}}\left(y(x)-kx\right)=-\frac{3}{4}\,(=b).$$

Вывод. Прямая $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}$ является наклонной асимптотой графика функции как при $x\to-\infty$, так и при $x\to+\infty$.

3. Найдем промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума. Для этого найдем x'_t, y'_t, а, следовательно, y'_x и x'_y.

Имеем $x'_t=\dfrac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2}=\dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$ (у нас $t\neq 1$) $\Rightarrow x'_t=0$ при $t=0$ и $t=2$; $y'_t=\dfrac{t^2-1-2t^2}{(t^2-1)^2}=\dfrac{-(t^2+1)}{(t^2-1)^2}$ (у нас $t\neq\pm 1$) $\Rightarrow y'_t<0$ для всех $t\neq\pm 1$. А тогда

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2};\,x'_y=-\frac{t(t-2)(t+1)^2}{t^2+1}\,(t\neq\pm 1).$$

Так как y'_t не меняет знак (у нас всегда $y'_t<0$), то y'_x и x'_y меняют знак вместе с x'_t (y'_x и x'_y имеют знак, противоположный знаку x'_t). У нас функция определена для значений t из $(-\infty,\,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\,+\infty)$. С помощью критических точек: $t=0$

и $t=2$ разбиваем область определения функции на интервалы, в каждом из которых производная x'_t (а значит, и производные y'_x, x'_y) сохраняет знак. Таким образом, мы получаем следующие интервалы: $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$; $(2, +\infty)$. Поведение функций $x(t)$ и $y(t)$ в этих интервалах представляет следующая таблица.

Интервалы значений t	Знак x'_t	Поведение функции $x(t)$	Знак y'_t	Поведение функции $y(t)$	Знак y'_x	Знак x'_y	Ветви графика
$(-\infty,-1)$	$\oplus$	возрастает от $-\infty$ до $-1/2$	$\ominus$	убывает от 0 до $-\infty$	$\ominus$	$\ominus$	(L_3)
$(-1,0)$	$\oplus$	возрастает от $-1/2$ до 0	$\ominus$	убывает от $+\infty$ до 0	$\ominus$	$\ominus$	(L_{21})
$(0,1)$	$\ominus$	убывает от 0 до $-\infty$	$\ominus$	убывает от 0 до $-\infty$	$\oplus$	$\oplus$	(L_{22})
$(1,2)$	$\ominus$	убывает от $+\infty$ до 4	$\ominus$	убывает от $+\infty$до 2/3	$\oplus$	$\oplus$	(L_{12})
$(2,+\infty)$	$\oplus$	возрастает от 4 до $+\infty$	$\ominus$	убывает от 2/3 до 0	$\ominus$	$\ominus$	(L_{11})

Теперь строим график (рис. 4.53).

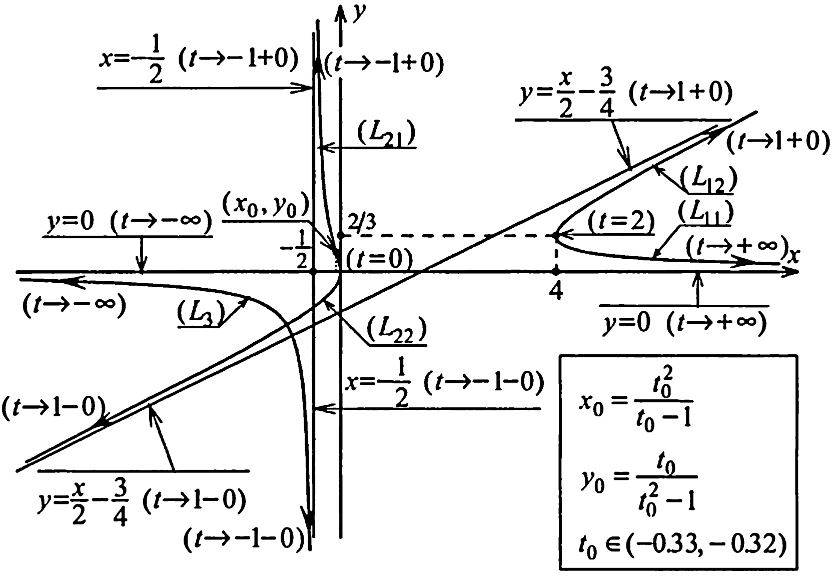


Рис. 4.53

Для наглядности на графике указано, как ветви графика соответствуют изменению параметра.

Из выражения для $x'_y = -\dfrac{t(t-2)(t+1)^2}{t^2+1}$ ($t \neq \pm 1$) видно, что $x'_y = 0$ при $t = 0$ и при $t = 2$. Значению $t = 0$ соответствует точка $(0, 0)$ графика, а значению $t = 2$ — точка $\left(4, \dfrac{2}{3}\right)$.

Функция $x = x(y)$ в точке $y = 0$ имеет максимум: $x_{\max} = x(0) = 0$ ($x(t)\big|_{t=0} = 0$), а в точке $y = \dfrac{2}{3}$ — минимум: $x_{\min} = x\left(\dfrac{2}{3}\right) = 4$ ($x(t)\big|_{t=2} = 4$).

4. Найдем промежутки, в которых сохраняются направления выпуклости графика функции, и точки перегиба.

Для этого находим y''_{x^2}. Имеем

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = \frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3} \ (t \neq \pm 1).$$

Из выражения для y''_{x^2} следует, что $y''_{x^2} = 0$ в точке, являющейся корнем уравнения: $t^3 + 3t + 1 = 0$, и что $y''_{x^2} = \infty$ при $t = 0$ и $t = 2$. Положим $\varphi(t) = t^3 + 3t + 1 \Rightarrow \varphi'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ для любого t. Значит, функция $\varphi(t)$ строго возрастающая. Имеем $\varphi(-1) < 0$, $\varphi(0) > 0$. Следовательно, уравнение $t^3 + 3t + 1 = 0$ имеет только один вещественный корень, и этот корень $t_0 \in (-1, 0)$. Можно, конечно, получить и более точную оценку для t_0, выбирая более близкие t_1 и t_2 такие, что $\varphi(t_1) < 0$, $\varphi(t_2) > 0$. (Например, пусть $t_1 = -0.33$, а $t_2 = -0.32$. Имеем $\varphi(-0.33) < 0$, а $\varphi(-0.32) > 0$. Значит, $-0.33 < t_0 < -0.32$.)

Положим $x_0 = \dfrac{t_0^2}{t_0 - 1}$, $y_0 = \dfrac{t_0}{t_0^2 - 1}$ ($x_0 \approx -0.08$, $y_0 \approx 0.37$). Составим теперь таблицу изменения знака производной y''_{x^2} и определим с ее помощью интервалы выпуклости графика функции вверх и вниз, а также точки перегиба.

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, t_0)$	$(t_0, 0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x	$\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$	$-\dfrac{1}{2}$	$\left(-\dfrac{1}{2}, x_0\right)$	$(x_0,0)$	$(-\infty,0)$	$(4,+\infty)$	$(4,+\infty)$
y	$(-\infty,0)$	∞	$(y_0,+\infty)$	$(y_0,0)$	$(-\infty,0)$	$\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$	$\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$
y''_{x^2}	<0		>0	<0	>0	<0	>0
Направ ление выпук лости	вверх		вниз	вверх	вниз	вверх	вниз
	(L_3)		(L_{21})	(L_{21})	(L_{22})	(L_{12})	(L_{11})
			Точка (x_0,y_0) – точка перегиба (L_{21})				

§ 16. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$. Как мы знаем, в этом случае среди значений функции обязательно имеются и наибольшее M, и наименьшее m. Как найти эти значения?

Если наибольшее значение M достигается в некоторой внутренней точке c промежутка $[a,b]$ ($c \in (a,b)$), то оно необходимо будет одним из максимумов $f(x)$. Но значение M может достигаться функцией $f(x)$ и в конце промежутка $[a,b]$, т. е. в точках a или b. Из этого следует, что для отыскания наибольшего значения $f(x)$ нужно:

1) найти все точки максимума $x_1, x_2, ..., x_m$ этой функции, лежащие в интервале (a,b);

2) выбрать наибольшее из чисел: $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m), f(a), f(b)$.

Аналогично, чтобы найти наименьшее значение функции $f(x)$ в промежутке $[a,b]$, нужно:

1) найти все точки минимума $\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ ...,\ \tilde{x}_k$ этой функции, лежащие в интервале (a,b);

2) выбрать наименьшее из чисел: $f(\tilde{x}_1), f(\tilde{x}_2), ..., f(\tilde{x}_k), f(a), f(b)$.

Замечание 1. Задача по отысканию наибольшего и наименьшего значений функции, определенной и непрерывной в замкнутом промежутке $[a,b]$, принципиально заведомо может быть решена, если у функции $f(x)$ в интервале (a,b) имеется конечное число критических точек. Изложенный выше метод позволяет находить точки экстремума такой функции с любой степенью точности. Для этого нужно только уметь находить с заданной степенью точности вещественные корни уравнения вида $\varphi(x)=0$. Простейшие методы нахождения вещественных корней уравнения вида $\varphi(x)=0$ изложены ниже (см. дополнение).

Замечание 2. Если желательно избежать исследования критических точек на максимум и минимум, то можно просто сравнить между собой значения функции $f(x)$ во всех критических точках и в граничных точках a и b. Наибольшее из этих значений и будет, очевидно, наибольшим значением $f(x)$ на промежутке $[a,b]$, а наименьшее из этих значений будет наименьшим значением $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

Замечание 3. Пусть в интервале (a,b) имеется только одна точка экстремума x_0. Тогда, если точка x_0 есть точка максимума функции $f(x)$, то без дальнейших исследований можно утверждать, что $f(x)$ и есть наибольшее значение функции в промежутке $[a,b]$; если же x_0 есть точка минимума функции $f(x)$, то $f(x_0)$ является наименьшим значением этой функции в промежутке $[a,b]$ (см. рис. 4.54).

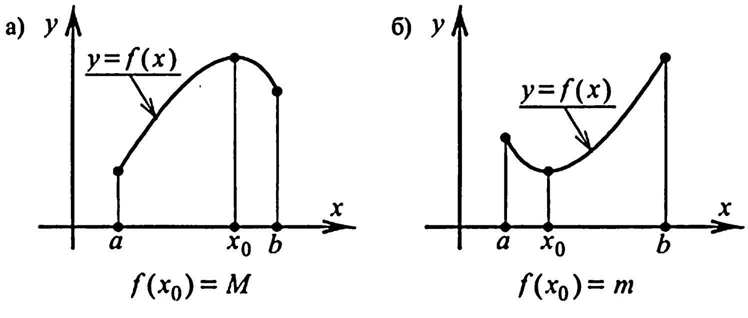


Рис. 4.54

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=2x^3-18x^2+48x+1$$

на промежутке $[1,3]$.

▶ Имеем $y'=6x^2-36x+48$; $y'=0$ в точках $x_1=2$, $x_2=4$. (Точка $x_2 \notin [1,3]$. Значит, она для нас не интересна.) Точек, подозрительных на острый экстремум, у заданной функции нет. Имеем, далее,

$$y''=12x-36; y''(x_1)=y''(2)=-12<0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка $x_1=2$ — точка максимума.

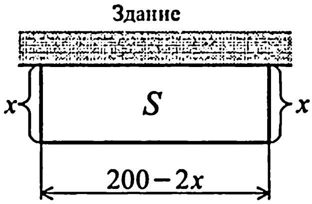


Рис. 4.55

Так как $x_1 = 2$ — единственная точка экстремума $f(x)$ в интервале $(1, 3)$, то заключаем, что $M = y(2) = 41$.

Находим теперь значения функции на концах промежутка $[1, 3]$. Имеем $y(1) = 33$, $y(3) = 37$. Значит, $m = 33$ ($m = y(1)$).

2. Задачи конкретного содержания.

Задача 1. Из имеющихся досок можно построить забор длиной в 200 метров. Требуется огородить им прямоугольный двор наибольшей площади, используя в качестве одной из сторон стену прилегающего здания.

▶ Ясно, что должно быть: $x \geq 0$ и $200 - 2x \geq 0$, т. е. $x \in [0, 100]$ (см. рис. 4.55). Имеем $S = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$. Требуется найти наибольшее значение $S(x)$ в промежутке $[0, 100]$. Имеем $S'(x) = 200 - 4x$; $S'(x) = 0$ в точке $x_0 = 50$. $S''(x) = -4$, в частности, $S''(x_0) = -4 < 0$. Значит, точка $x_0 = 50$ есть точка максимума функции $S(x)$. Так как точка $x_0 = 50$ является единственной точкой экстремума функции $S(x)$ в интервале $(0, 100)$, то наибольшим значением функции $S(x)$ в $[0, 100]$ будет $S(x_0)$, т. е.

$$S(x)\big|_{x=50} = 5000\ м^2. \blacktriangleleft$$

Задача 2. Имеется прямоугольный лист жести с размерами 5 *дм* × 8 *дм*. По углам вырезаются одинаковые квадратики. Полученные при этом кромочки загибаются под прямым углом, и получается ящик. Требуется сделать ящик наибольшей вместимости.

▶ Ясно, что должно быть: $x \geq 0$ и $5 - 2x \geq 0$, т. е. $x \in [0, 2.5]$ (см. рис. 4.56). Имеем

$$V = (8 - 2x)(5 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

Требуется найти наибольшее значение функции $V(x)$ в промежутке $[0, 2.5]$. Имеем $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$; $V'(x) = 0$ в точках

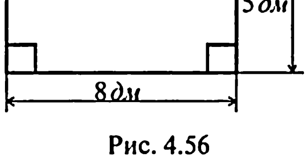


Рис. 4.56

$x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{10}{3}$. (Точка $x_2 = \frac{10}{3} \notin [0, 2.5]$. Значит, она для нас не интересна.) Точек, подозрительных на острый экстремум, у функции $V(x)$ нет. Имеем, далее,

$$V''(x) = 24x - 52;\ V''(x_1) = $$
$$= V''(1) = -28\ (< 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Точка $x_1 = 1$ — точка максимума функции $V(x)$. Так как $x_1 = 1$ — единственная точка экстремума функции $V(x)$ в интервале $(0, 2.5)$, то заключаем, что наибольшее значение функция $V(x)$ имеет при $x = 1$ (*дм*). Следовательно, $V_{наиб.} = V(1) = 18$ (*дм*³). ◀

(Для сравнения: $V\left(\frac{1}{2}\right) = 14$ (*дм*³); $V\left(\frac{3}{2}\right) = 15$ (*дм*³).)

Задача 3. Дан конус с радиусом основания R и высотой H. Требуется вписать в этот конус цилиндр наибольшего объема. (Будем считать условно: конус — это ствол дерева, из которого делается цилиндрическое бревно, причем бревно делается так, чтобы отходов было как можно меньше.)

▶ Пусть r — радиус, h — высота искомого цилиндра. Тогда объем V цилиндра равен: $V = \pi r^2 \cdot h$. Из подобия треугольников DBC и OBS можно написать $\frac{DC}{OS} = \frac{DB}{OB}$, т. е. $\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R} \Rightarrow h = \frac{H}{R}(R - r)$ (h — переменная, но не независимая). Теперь для объема V цилиндра будем иметь выражение

$$V = \pi \frac{H}{R}(R - r)r^2$$

(V — это функция уже одного аргумента r, ибо H и R — заданные числа). Ясно, что $0 \le r \le R$, т. е. $r \in [0, R]$. Требуется найти наибольшее значение для функции $V(r)$ в промежутке $[0, R]$.

Имеем $V'(r) = \pi \frac{H}{R}(2rR - 3r^2)$; $V'(r) = 0$ в точках $r_1 = 0$ и $r_2 = \frac{2}{3}R$. Точка $r_1 \in [0, R]$, но эта точка краевая, т. е. $r_1 \notin (0, R)$. Точек, подозрительных на острый экстремум, у функции $V(r)$ нет. Значит, точка $r_2 = \frac{2}{3}R$ является единственной критической точкой для функции $V(r)$ в промежутке $(0, R)$. Имеем $V'\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{\pi HR}{3}$ (> 0); $V'\left(\frac{3}{4}R\right) = -\frac{3\pi HR}{16}$ (< 0). Видим, что $V'(r)$ при переходе через критическую точку $r_2 = \frac{2}{3}R$

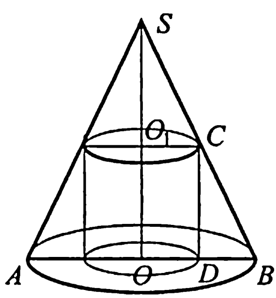


Рис. 4.57

меняет знак с"+"на "−". Следовательно, точка $r_2 = \frac{2}{3}R$ является точкой максимума для функции $V(r)$. Так как $r_2 = \frac{2}{3}R$ — единственная точка экстремума функции $V(r)$ в интервале $(0, R)$, то заключаем, что наибольшее значение функция $V(r)$ имеет при $r = \frac{2}{3}R$. Следовательно, $V_{\text{наиб цил.}} = V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H$. ◀

(Имеем $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Следовательно, $\frac{V_{\text{наиб цил.}}}{V_{\text{конуса}}} = \frac{4}{9} \approx$ $\approx 0.44 (\approx 44\%)$. Если конус — ствол дерева, из которого делается цилиндрическое бревно, то 56 % древесины идет в отходы.)

Замечание. Часто бывает (как и в задаче 3), что величина, наибольшее или наименьшее значение которой нас интересует, представляется в виде функции нескольких переменных. Но из условий задачи следует, что все эти переменные выражаются через одну из них (или через какую-нибудь новую переменную). Для того, чтобы была применима изложенная выше теория, такое сведение к функции одного аргумента обязательно.

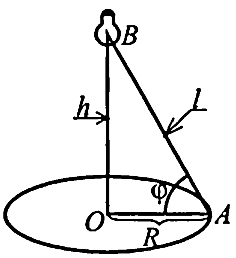


Рис. 4.58

Задача 4. Имеется круглый стол радиуса R. Над центром стола висит электрическая лампочка. На какой высоте h над столом надо повесить лампу, чтобы на краях стола получилась наибольшая освещенность?

▶ Важен угол φ и квадрат расстояния l, ибо $E = I\frac{\sin\varphi}{l^2}$, где E — освещенность, I — сила света лампочки. Видим, что E — функция, зависящая от двух переменных φ и l. Из треугольника OAB находим $\cos\varphi = \frac{R}{l}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{l} = \frac{\cos\varphi}{R}. \tag{1}$$

А тогда

$$E = \frac{l}{R^2}\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi. \qquad (*)$$

Из смысла задачи ясно, что функцию (*) достаточно исследовать на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (Если $\varphi \to 0$, то из (1) следует: $l \to R$, а значит, $h \to 0$; если $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, то из (1) следует: $l \to +\infty$, а значит, и $h \to +\infty$. Отметим, что $E \to 0$ как при $\varphi \to 0$, так и при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$). Итак, требуется найти наибольшее значение функции $E(\varphi) = \frac{l}{R^2}\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi$ на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем

$$E'(\varphi) = \frac{l}{R^2}(\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi) =$$
$$= \frac{l}{R^2}\cos\varphi(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi);$$

$E'(\varphi) = 0$, когда $\cos\varphi = 0$ и когда $\mathrm{tg}^2\,\varphi = \frac{1}{2}$. $\cos\varphi = 0$, если $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$. Этот корень не рассматриваем, так как он является концом промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\mathrm{tg}^2\,\varphi_2 = \frac{1}{2}$ дает $\mathrm{tg}\,\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (берем только положительное значение для $\mathrm{tg}\,\varphi_2$, так как $\varphi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$).

Функция $E(\varphi)$ на концах промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ принимает значения, равные нулю, а для всех $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ она имеет положительные значения. Точка $\varphi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ является единственной критической точкой для $E(\varphi)$. Следовательно, в точке φ_2 функция $E(\varphi)$ принимает наибольшее значение. У нас $\frac{h}{R} = \operatorname{tg}\varphi$ (из треугольника OAB). Значит, при $\varphi = \varphi_2$

$$\frac{h}{R} = \operatorname{tg}\varphi_2 \Leftrightarrow \frac{h}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}R \text{ (т. е. } h \approx 0.7R\text{)}. ◀$$

Задача 5. Пункт C отстоит от берега реки на 6 *км*. Пункт A отстоит от пункта B на расстояние 23 *км* (A — пункт отправления лодки). Лодка плывет по реке со скоростью 5 *км/час*. В каком месте гребцу следует высадиться на берег, чтобы в кратчайшее время попасть в пункт C, если скорость ходьбы пешком равна 4 *км/час*?

▶ Пусть M — место высадки, и пусть $BM = x$ (см. рис. 4.59). Пусть t — время, потребное на весь путь AMC. Тогда $t = \frac{23-x}{5} + \frac{\sqrt{36+x^2}}{4}$, $x \in [0, 23]$. Требуется найти наименьшее значение функции $t(x)$ на промежутке $[0, 23]$.

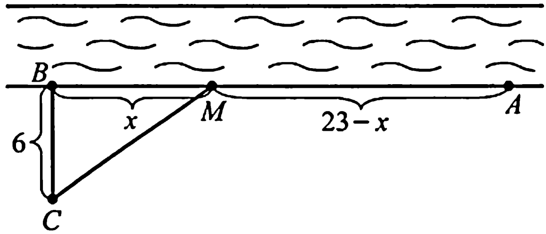


Рис. 4.59

Имеем $t'_x = -\frac{1}{5} + \frac{x}{4\sqrt{36+x^2}}$; $t'_x = 0$ в точках $x_1 = -8$, $x_2 = 8$.

Точка $x_1 \notin [0, 23]$. Точек, подозрительных на острый экстремум, у функции $t(x)$ нет. Значит, точка $x_2 = 8$ является единственной критической точкой для функции $t(x)$ в промежутке $(0, 23)$. Имеем, далее, $t''_{xx} = \dfrac{9}{(36+x^2)^{3/2}} \Rightarrow t''_{xx}(8) = \dfrac{9}{1000} > 0$. Значит, точка $x_2 = 8$ — точка минимума функции $t(x)$. Так как $x_2 = 8$ — единственная точка экстремума функции $t(x)$ в интервале (0,23), то заключаем, что наименьшее значение функция $t(x)$ имеет при $x = x_2 = 8$. Следовательно, $t_{\text{наименьш.}} = t(8) = 5.5$ (*час*). ◀

(Заметим, для сравнения:

1. Если бы гребец шел пешком из пункта A в пункт C, то он затратил бы время $t = \dfrac{\sqrt{36+529}}{4} = \dfrac{\sqrt{565}}{4} \approx 5.94$ (*час*).

2. Если бы гребец высадился на берег в точке B, то он затратил бы время $t = \dfrac{23}{5} + \dfrac{6}{4} = 6.1$ (*час*).)

Дополнение. Простейшие методы приближенного вычисления вещественных корней уравнения $\varphi(x) = 0$

Пусть имеется уравнение

$$\varphi(x) = 0. \tag{1}$$

Будем решать задачу о нахождении вещественного корня ξ уравнения (1) в предположении, что корень ξ изолирован, т. е. что найден содержащий его промежуток $[a,b]$: $a < \xi < b$, в котором других вещественных корней уравнения (1) нет.

Отметим, что каждый вещественный корень ξ уравнения (1) представляет собой абсциссу точки пересечения графика функции $y = \varphi(x)$ с осью Ox (см. рис. 4.60). С помощью схемы графика функции $y = \varphi(x)$ или каким-нибудь иным способом обычно удается получить для каждого корня ξ грубые приближения по недостатку и по избытку. Такого рода грубых приближений во многих случаях оказывается достаточным, чтобы, отправляясь от них, получить значения корня с требуемой точностью.

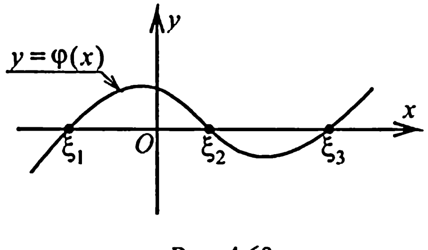


Рис. 4.60

Итак, пусть корень ξ уравнения (1) "зажат" между двумя его приближениями a и b по недостатку и по избытку. Будем предполагать всегда выполнение следующих условий:

1) функция $\varphi(x)$ в промежутке $[a,b]$ непрерывна вместе со своими производными $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$;

2) значения $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ функции на концах промежутка имеют разные знаки: $\varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$;

3) обе производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ сохраняют каждая определенный знак во всем промежутке $[a,b]$.

Заметим, что сохранение знака у $\varphi'(x)$ говорит о монотонности функции $y=\varphi(x)$ (и, следовательно, $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ имеют разные знаки). Сохранение же знака у $\varphi''(x)$ означает, что выпуклость графика функции $y=\varphi(x)$ для всех x из промежутка $[a,b]$ обращена в одну сторону (либо вверх, либо вниз).

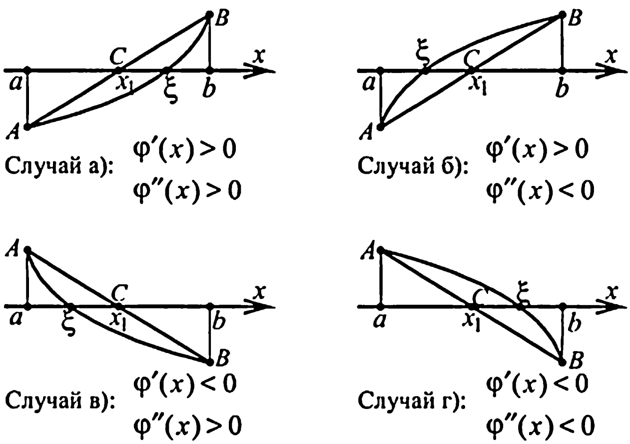


Рис. 4.61

На рис. 4.61 изображены четыре случая, отвечающих возможным комбинациям знаков у $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$.

I. Метод хорд.

Проводится хорда AB и за новое приближенное значение корня принимается абсцисса x_1 точки пересечения C хорды AB с осью Ox. Уравнение хорды имеет вид

$$\frac{y-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Поэтому в точке $C(x_1,0)$ будем иметь $\dfrac{-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{x_1-a}{b-a}$, откуда

$$x_1=a-\frac{(b-a)\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}. \tag{2}$$

Рассмотрение всех четырех случаев, изображенных на рис. 4.61, показывает, что точка x_1 лежит между точками a и b с той стороны от точки ξ, где $\varphi(x)$ имеет знак, противоположный знаку $\varphi''(x)$.

Для определенности рассмотрим случай: $\varphi'(x) > 0$; $\varphi''(x) > 0$, $x \in [a,b]$ (рис. 4.61, случай а)). В остальных случаях рассуждения совершенно аналогичные. В рассматриваемом случае x_1 лежит между точками a и ξ.

С промежутком $[x_1,b]$ поступаем так же, как мы поступали с промежутком $[a,b]$ (см. рис. 4.62).

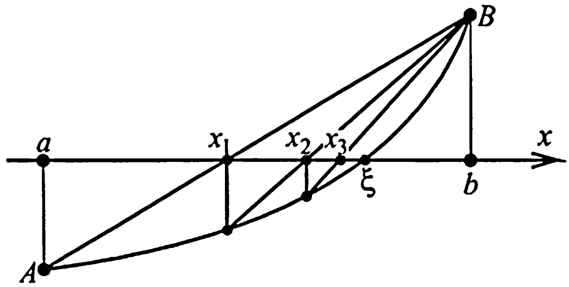


Рис. 4.62

При этом для нового приближенного значения корня получаем

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1)\cdot\varphi(x_1)}{\varphi(b) - \varphi(x_1)} \tag{3}$$

(в формуле (2) заменяем x_1 на x_2, a на x_1). Значение x_2 оказывается между x_1 и ξ. Затем рассматриваем промежуток $[x_2,b]$ и находим новое приближение x_3, заключенное между x_2 и ξ и т. д. В результате получим последовательность

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots < \xi \tag{4}$$

все более и более точных приближенных значений корня, причем x_{n+1} через x_n выражается формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)\varphi(x_n)}{\varphi(b) - \varphi(x_n)}. \tag{5}$$

Для оценки погрешности соответствующих приближений воспользуемся формулой Лагранжа

$$\varphi(x_n) - \varphi(\xi) = \varphi'(c)(x_n - \xi)(x_n < c < \xi),$$

или, поскольку $\varphi(\xi) = 0$,

$$\varphi(x_n) = \varphi'(c)(x_n - \xi),$$

откуда $x_n - \xi = \dfrac{\varphi(x_n)}{\varphi'(c)}$.

Если обозначить через m наименьшее значение $|\varphi'(x)|$ на рассматриваемом промежутке, то для оценки погрешности получим формулу

$$|x_n - \xi| \le \frac{|\varphi(x_n)|}{m}. \tag{6}$$

Замечание 1. Формула (6) позволяет судить о близости x_n к ξ по величине значения $\varphi(x_n)$. Однако в большинстве случаев она дает слишком грубую оценку погрешности, т. е. фактическая ошибка оказывается значительно меньше.

Покажем, что последовательность приближений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{7}$$

для корня ξ уравнения (1), получаемых методом хорд, в наших условиях всегда сходится к ξ.

В самом деле, для обсуждаемого случая а) ($\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) > 0$) имеем: последовательность (7) монотонно возрастает и ограничена сверху (см. (4)). Следовательно, последовательность (7) имеет конечный предел η. (Ясно, что $\eta \le \xi$.)

В равенстве (5) перейдем к пределу при $n \to \infty$. Принимая во внимание непрерывность функции $\varphi(x)$, получим

$$\eta = \eta - \frac{(b-\eta)\varphi(\eta)}{\varphi(b)-\varphi(\eta)},$$

откуда $\varphi(\eta) = 0$. Так как $\varphi(x)$ строго возрастает на промежутке $[a,b]$, то она имеет на этом промежутке единственный корень, и этим корнем по условию является ξ. Значит, $\eta = \xi$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Замечание 2. В случае г) ($\varphi'(x) < 0$, $\varphi''(x) < 0$), как и в случае а), мы получаем монотонно возрастающую последовательность приближений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, стремящуюся к ξ слева.

В случаях же б) ($\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) < 0$) и в) ($\varphi'(x) < 0$, $\varphi''(x) > 0$) мы придем к последовательностям монотонно убывающих приближенных значений $b > x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots > \xi$, стремящихся к корню ξ справа.

II. Метод касательных (метод Ньютона).

В том из концов дуги $\smile AB$, в котором знаки $\varphi(x)$ и $\varphi''(x)$ совпадают, проводим касательную и за новое приближение значения корня ξ уравнения (1) принимаем абсциссу $\tilde{x}_1$ точки D пересечения этой касательной с осью Ox (если взять касательную для другого конца $\smile AB$, то может оказаться, что точка ее пересечения с осью Ox будет отстоять от точки ξ дальше, чем точки a и b; (см. пунктирную прямую на рис. 4.63). Для определенности станем рассматривать опять случай а) ($\varphi'(x) > 0$ и $\varphi''(x) > 0$). В остальных трех случаях рассуждения совершенно аналогичные.

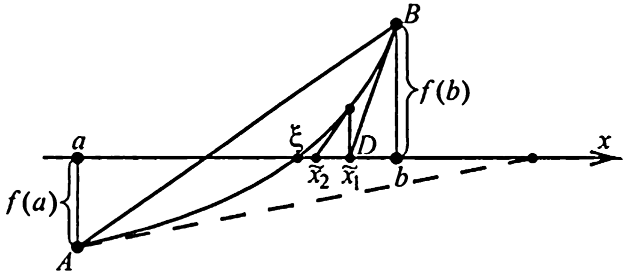


Рис. 4.63

Уравнение касательной к $\smile AB$ в точке B будет таким:

$$y - \varphi(b) = \varphi'(b)(x - b).$$

Поэтому в точке $D(\tilde{x}_1, 0)$ будем иметь

$$0 - \varphi(b) = \varphi'(b)(\tilde{x}_1 - b),$$

откуда

$$\tilde{x}_1 = b - \frac{\varphi(b)}{\varphi'(b)}. \tag{8}$$

Из рис. 4.63 видно, что точка $\tilde{x}_1$ лежит между точками ξ и b. С промежутком $[a, \tilde{x}_1]$ поступаем так же, как мы поступали с промежутком $[a, b]$ (см. рис. 4.63). В результате, для нового приближенного значения $\tilde{x}_2$ корня уравнения (1) получим

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 - \frac{\varphi(\tilde{x}_1)}{\varphi'(\tilde{x}_1)}$$

(в формуле (8) заменяем $\tilde{x}_1$ на $\tilde{x}_2$, b на $\tilde{x}_1$). Значение $\tilde{x}_2$ оказывается лежащим между ξ и $\tilde{x}_1$. Затем рассматриваем промежуток $[a, \tilde{x}_2]$ и находим новое приближенное значение $\tilde{x}_3$ корня уравнения (1) и т. д.

В результате получим последовательность

$$b > \tilde{x}_1 > \tilde{x}_2 > \tilde{x}_3 > \ldots > \tilde{x}_n > \ldots > \xi \tag{9}$$

все более и более точных приближенных значений корня ξ, причем $\tilde{x}_{n+1}$ через $\tilde{x}_n$ выражается формулой

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{\varphi(\tilde{x}_n)}{\varphi'(\tilde{x}_n)}. \tag{10}$$

Отметим, что формула (10) справедлива во всех четырех случаях, изображенных на рис. 4.61. Для оценки погрешностей полученных приближений можно опять воспользоваться формулой (6).

Можно, однако, получить и иную формулу, позволяющую судить о погрешности, допущенной на каком-нибудь шаге нашего процесса приближений по погрешности, допущенной на предшествующем шаге. В самом деле, имеем по формуле Тейлора

$$0 = \varphi(\xi) = \varphi(\tilde{x}_n) + \varphi'(\tilde{x}_n)(\xi - \tilde{x}_n) + \frac{1}{2}\varphi''(c)(\xi - \tilde{x}_n)^2,$$

где $\xi < c < \tilde{x}_n$, или

$$0 = \frac{\varphi(\tilde{x}_n)}{\varphi'(\tilde{x}_n)} + (\xi - \tilde{x}_n) + \frac{1}{2}\frac{\varphi''(c)}{\varphi'(\tilde{x}_n)}(\xi - \tilde{x}_n)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_n - \frac{\varphi(\tilde{x}_n)}{\varphi'(\tilde{x}_n)} = \xi + \frac{1}{2}\frac{\varphi''(c)}{\varphi'(\tilde{x}_n)}(\xi - \tilde{x}_n)^2.$$

Но из (10) $\tilde{x}_n - \frac{\varphi(\tilde{x}_n)}{\varphi'(\tilde{x}_n)} = \tilde{x}_{n+1}$. Следовательно, будем иметь

$$\tilde{x}_{n+1} - \xi = \frac{1}{2}\frac{\varphi''(c)}{\varphi'(\tilde{x}_n)}(\xi - \tilde{x}_n)^2.$$

Обозначим через M наибольшее значение $|\varphi''(x)|$, а через m — наименьшее значение $|\varphi'(x)|$ в промежутке $[a,b]$. Будем иметь тогда

$$|\tilde{x}_{n+1} - \xi| \le \frac{M}{2m}(\tilde{x}_n - \xi)^2. \tag{11}$$

Таким образом, погрешность $|\tilde{x}_{n+1} - \xi|$ оказывается меньше величины, пропорциональной квадрату разности $(\tilde{x}_n - \xi)$, что обеспечивает быстрое сближение приближенных значений корня с истинным значением.

Покажем, что последовательность приближений

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots \tag{12}$$

для корня ξ уравнения (1), получаемых методом касательных, в наших условиях всегда сходится к ξ.

В самом деле, для обсуждаемого случая а) ($\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) > 0$) имеем: последовательность (12) монотонно убывает и ограничена снизу (см. (9)). Следовательно, последовательность (12) имеет конечный предел $\tilde{\eta}$ (ясно, что $\tilde{\eta} \geq \xi$). В равенстве (10) перейдем к пределу при $n \to \infty$. Принимая во внимание непрерывность $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$, получим

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta} - \frac{\varphi(\tilde{\eta})}{\varphi'(\tilde{\eta})},$$

откуда $\varphi(\tilde{\eta}) = 0$. Так как $\varphi(x)$ строго возрастает на промежутке $[a,b]$, то она имеет на этом промежутке единственный корень, и этим корнем по условию является ξ . Значит, $\tilde{\eta} = \xi$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \xi$.

Замечание 3. В случае г) ($\varphi'(x) < 0$, $\varphi''(x) < 0$), как и в случае а), получается монотонно убывающая последовательность приближенных значений $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots$, стремящаяся к ξ справа. В случаях же б) ($\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) < 0$) и в) ($\varphi'(x) < 0$, $\varphi''(x) > 0$) получаются монотонно возрастающие последовательности приближенных значений $a < \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \ldots < \tilde{x}_n < \ldots < \xi$, стремящиеся к корню ξ слева.

III. Комбинированный метод.

Этот метод состоит в одновременном использовании методов **I** и **II**. Для определенности рассмотрим снова случай а) ($\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) > 0$). Значения x_1 и $\tilde{x}_1$ вычисляем по прежним формулам, т. е. принимаем

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}, \tilde{x}_1 = b - \frac{\varphi(b)}{\varphi'(b)}, \tag{13}$$

причем, как установлено выше,

$$x_1 < \xi < \tilde{x}_1 .$$

На следующем шаге вместо промежутка $[a,b]$ рассматриваем промежуток $[x_1, \tilde{x}_1]$ (см. рис. 4.64). Это дает

$$x_2 = x_1 - \frac{(\tilde{x}_1 - x_1)\varphi(x_1)}{\varphi(\tilde{x}_1)-\varphi(x_1)}; \tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 - \frac{\varphi(\tilde{x}_1)}{\varphi'(\tilde{x}_1)}, \tag{14}$$

причем $x_2 < \xi < \tilde{x}_2$. Затем рассматриваем промежуток $[x_2, \tilde{x}_2]$ и т. д. В результате получаем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(\tilde{x}_n - x_n)\varphi(x_n)}{\varphi(\tilde{x}_n)-\varphi(x_n)}; \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{\varphi(\tilde{x}_n)}{\varphi'(\tilde{x}_n)} . \tag{15}$$

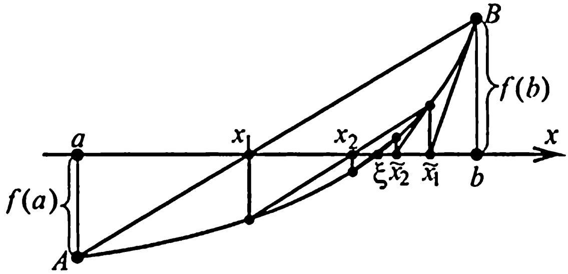


Рис. 4.64

Здесь мы приближаемся к корню ξ уравнения (1) сразу с обеих сторон, а не с одной стороны, как в методах **I** и **II**. Поэтому разность $\tilde{x}_n - x_n$ позволяет непосредственно судить о качестве полученных приближений, и никакие формулы для оценки погрешности здесь не нужны.

Пример. Вычислить с точностью до 0.0005 положительные корни уравнения $x^5 - x - \frac{1}{5} = 0$.

▶ Схема графика функции $\varphi(x) = x^5 - x - \frac{1}{5}$ для $x \geq 0$ изображена на рис. 4.65. Из этого рисунка видно, что уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет единственный положительный корень ξ, причем $1 < \xi < 1.1$. Так как $\varphi'(x) = 5x^4 - 1$, $\varphi''(x) = 20x^3$, то на промежутке $[1, 1.1]$ $\varphi'(x) > 0$ и $\varphi''(x) > 0$, т. е. знаки производных не меняются на этом промежутке.

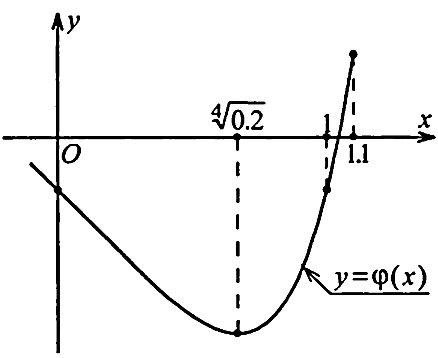


Рис. 4.65

Применяем комбинированный метод **III**. Имеем

$$\varphi(a) = \varphi(1) = -0.2; \varphi(b) = \varphi(1.1) = 0.31051;$$
$$\varphi'(b) = \varphi'(1.1) = 6.3205.$$

Формулы (13) дают:

$$x_1 = 1 + \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.51051} \approx 1.039; \tilde{x}_1 = 1.1 - \frac{0.31051}{6.3205} \approx 1.051 .$$

При этом $\tilde{x}_1 - x_1 \approx 0.012$, т. е. точность недостаточна.

Делаем второй шаг:

$$\varphi(1.039) \approx -0.0282; \varphi(1.051) \approx 0.0313; \varphi'(1.051) \approx 5.1005 .$$

Формулы (14) дают:

$$x_2 \approx 1.039 + \frac{0.012 \cdot 0.0282}{0.0595} \approx 1.04469; \tilde{x}_2 \approx 1.051 - \frac{0.0313}{5.1005} \approx 1.04487 .$$

При этом $\tilde{x}_2 - x_2 \approx 0.00018$, т. е. точность достаточна. Таким образом, $1.04469 < \xi < 1.04487$. Любое из двух чисел 1.04469 и 1.04487 можно взять за приближенное значение корня ξ уравнения $\varphi(x) = 0$. При этом ошибка не превзойдет числа $0.00018 (< 0.0005)$.

Литература

1. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математического анализу: учеб. пособие / Б. П. Демидович. — 13-е изд., испр. — М.: Изд-во МГУ, ЧеРо, 1997.

2. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М.: Физматлит, 2005.

3. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: учебник для бакалавров. В 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев — 6-е изд., перераб. и дополн. — М.: Юрайт, 2014.

4. *Толстов, Г. П.* Курс математического анализа. В 2 т. Т. 1 / Г. П. Толстов. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954.

5. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001.

Учебное издание

Аксенов Анатолий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 1

Учебник и практикум для вузов

Формат 60×90 1/16.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 17,63

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru